Física Estadística

Relación 2: Teorema de Liouville y postulados de la Física Estadística

Problema 1. Consideremos una partícula que se mueve en el seno de un potencial unidimensional

$$V(x) = -Ax^2 + Bx^4$$

con A, $B > 0$.

1. Dibujar el potencial $V(x)$ y las trayectorias correspondientes en el espacio de las fases (x, p) para diferentes valores de la energía ¿Hay cortes de trayectorias en el diagrama?
2. Discutir si existe algún punto de inestabilidad ¿Qué ocurre en dicho(s) punto(s)?

Problema 2. Una partícula libre de masa m está obligada a moverse en una dimensión. Considerando que su Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$ (partícula libre), demuestre que el área del recinto rectangular con vértices (q_0, p_0), $(q_0, 2p_0)$, $(2q_0, p_0)$, y $(2q_0, 2p_0)$ permanece invariante frente a la evolución natural del sistema (es decir, las ecuaciones de Hamilton preservan el volumen del espacio de las fases).

Problema 3. Consideremos un péndulo simple, formado por una masa m que cuelga de una cuerda sin masa de longitud ℓ, que oscila con una amplitud pequeña. Se supone que no hay rozamiento y que el sistema está aislado. Si la energía total del péndulo es E, encontrar la ecuación que describe el movimiento del péndulo en el espacio de fases (p_θ, θ), donde θ es el ángulo de la oscilación y p_θ es el momento conjugado. Calcular $\gamma(E)$, i.e. el número de estados con energía menor o igual a E.

Problema 4. Un sistema mecánico está formado por una partícula de masa $m = 1$ sometida a la aceleración de la gravedad, $g = 1$, y que puede moverse sólo a lo largo del eje vertical z. Se sabe que el Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + z$$

y que la solución a las ecuaciones de Hamilton es

$$\begin{cases} z(t) = & z_0 + p_0 t - \frac{1}{2}t^2 \\ p(t) = & p_0 - t \end{cases}$$

1. Comprueba que este sistema dinámico verifica la ecuación de Liouville
2. Suponiendo que cuando la partícula alcanza el suelo rebota elásticamente para volver a ascender, encuentra la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en la posición z en función de la energía, E (sugerencia: utiliza la hipótesis ergódica y calcula dicha probabilidad como un promedio temporal).

Problema 5. Una partícula libre de masa $m = 1$ está obligada a moverse en una dimensión. Considera un Hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$, correspondiente a un oscilador armónico unidimensional de masa $m = 1$ y frecuencia $\omega = 1$.

1. Obtén la ecuación de movimiento del oscilador aplicando las ecuaciones de Hamilton
2. Demuestra que el Jacobiano de la transformación que relaciona las coordenadas $q\left(t\right)$ y $p\left(t\right)$ en un instante t con sus valores iniciales p_0 y q_0 es igual a la unidad.
3. Demuestra que el área de un recinto regular se conserva.
4. Haciendo uso del hecho de que el sistema es ergódico (lo cual implica que el promedio en la colectividad es igual al promedio en el tiempo), demuestre que la densidad de probabilidad de encontrar la masa m en la posición q viene dada por

$$P\left(q\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - q^2}} \qquad a^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

Problema 6. Estudiar la ergodicidad de un movimiento rectilíneo y uniforme

$$x\left(t\right) = t$$
$$y\left(t\right) = \omega t$$

en un rectángulo bidimensional donde $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, y $x + L_x \equiv x$, $y + L_y \equiv y$, es decir, con condiciones periódicas de contorno ¿Cuando es ergódico el sistema? Demostrar analíticamente.

Problema 7. El Hamiltoniano de un electrón en un campo magnético de magnitud H aplicado en la dirección del eje z viene dado por $\mathcal{H} = -\mu_B\hat{\sigma}_z H$ donde $\hat{\sigma}_z$ es el operador de espin de Pauli y μ_B el magnetón de Bohr. Calcula:

1. La matriz densidad canónica ($\hat{\rho} = \frac{1}{Z}\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}$) en la base en la que $\hat{\sigma}_z$ es diagonal. El promedio de $\hat{\sigma}_z$ en esta representación.
2. La matriz densidad en la base en la que $\hat{\sigma}_x$ es diagonal. El promedio de $\hat{\sigma}_z$ en esta representación.