Física Estadística

Relación 7: Gases cuánticos

Problema 1. Consideremos un sistema formado por dos partículas, cada una de las cuales puede estar en tres estados cuánticos de energías respectivas 0, ϵ y 3ϵ. El sistema está en equilibrio a temperatura T. Escriba todos los términos de la función de partición canónica cuando las partículas satisfacen:

1. La estadística clásica de Maxwell-Boltzmann
2. La estadística Bose-Einstein
3. La estadística Fermi-Dirac

Problema 2. Se tiene un sistema formado por N moléculas ($N \gg 1$) con tres niveles de energía para cada molécula dados por $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \epsilon$ y $\varepsilon_3 = 10\epsilon$.

1. Suponiendo que la temperatura es muy baja, demuestre que únicamente los niveles 1 y 2 están poblados cuando $T < T_c$, donde $T_c \approx {}^{10\epsilon}/_{k_B \ln N}$ define una temperatura umbral de población para el nivel 3.
2. Demuestre que la capacidad calorífica por molécula, c_V, es proporcional a T^{-2} para temperaturas muy altas, mientras que para temperaturas muy bajas es proporcional a $T^{-2}\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}$.

Problema 3. Calcule la densidad de estados $D(\varepsilon)$ con energía entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$, considerando partículas de espín 0 y por tanto, degeneración $g = 1$. Considere los casos de un gas ideal y un gas ultra-relativista.

Problema 4. Se considera un gas ideal relativista formado por bosones, con degeneración g y una relación entre energía y momento del tipo $\varepsilon = pc$. Además, para este tipo de gas se cumple que el potencial químico es cero, $\mu = 0$. Se pide:

1. Demostrar que la densidad de estados $D(\varepsilon)$ viene dada por

$$D(\varepsilon) = \frac{4\pi g V}{h^3 c^3}\varepsilon^2$$

2. Demostrar que para este tipo de gas se verifica $\langle P \rangle V = \langle E \rangle / 3$.
3. Demostrar, sin necesidad de calcular explícitamente ninguna integral, que la energía media es proporcional a T^4, y que la capacidad calorífica a volumen constante es proporcional a T^3.

Problema 5. Se considera un gas de fermiones ultra-relativista en un volumen V, de manera que la energía esta relacionada con el momento por la ecuación $\varepsilon = pc$, donde c es la velocidad de la luz. Suponiendo que el gas está completamente degenerado, se pide:

1. Calcular la energía de Fermi ε_F del gas.
2. Demostrar que la energía media total del gas es $\langle E \rangle = \frac{3}{4} N \varepsilon_F$
3. Demostrar que la presión del gas es proporcional a la potencia $\frac{4}{3}$ de la densidad de partículas.
4. Demostrar que, en el caso general en el que el gas no está completamente degenerado, se verifica que $\langle P \rangle V = \langle E \rangle / 3$.

Problema 6. Consideramos un gas bidimensional de electrones totalmente degenerado y de área A. Se pide:

1. Determinar la densidad de estados $D(\varepsilon)$, i.e. el número de estados permitidos con energía en el intervalo $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$.
2. Calcular el número total de electrones en función de la energía de Fermi ε_F.
3. Demostrar que el valor de la energía interna del gas de electrones para $T = 0$ es igual a $\rho \varepsilon_F / 2$.

Problema 7. Un gas cuántico está constituido por fermiones de espín $\frac{3}{2}$ que no interactúan entre sí. Suponiendo que la energía de cada fermión viene dada por $\varepsilon = p^n$, con $n > 0$, y que el gas se encuentra completamente degenerado ($T = 0$), calcule:

1. La función densidad de estados $D(\varepsilon)$.
2. El valor de la energía de Fermi en función de la densidad de partículas.

Problema 8. Los fotones constituyen un caso particular de gas ideal cuántico, pues no interactúan entre sí. Además, puede considerarse sin perder generalidad que un gas de fotones aislado y en equilibrio tiene potencial químico $\mu = 0$ y consecuentemente fugacidad $\lambda = 1$. Considerando que los fotones son bosones con espín $s = 1$ y energía $\varepsilon = pc = h\nu$, se pide:

1. Demostrar que la ecuación de estado del gas de fotones en el límite al continuo viene dada por
$$PV = \frac{4}{3} \frac{V}{c} \sigma T^4.$$
donde $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3}$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

2. A partir de la energía interna, obtenter la ecuación de Stefan-Boltzmann para la radiación R emitida por la cavidad, $R = \sigma T^4$. Para ello, tenga en cuenta que, en general, $R = \frac{1}{4}\rho_E \langle v \rangle$, donde ρ_E es la energía por unidad de volumen y $\langle v \rangle$ la velocidad media de las partículas del gas.
3. Calcular la densidad espectral de fotones $\rho_\nu(T)$, i.e. el número medio medio de fotones por unidad de volumen con frecuencia comprendida entre $(\nu, \nu + d\nu)$. A partir de ella calcule la densidad espectral de energía $u_\nu(T)$, y deduzca la ley de Rayleigh-Jeans y la ley del desplazamiento de Wien, correspondientes a los límites de bajas y altas frecuencias de $u_\nu(T)$, respectivamente.

Problema 9. Considere un gas de N bosones sin interacción y espín 0 en un contenedor de dimensión d arbitraria e (hiper-)volumen total V. La relación de dispersión del gas de bosones (i.e. la relación entre la energía y el momento de un bosón) es $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha|\mathbf{p}|^s$, donde la constante α y el exponente s son ambos positivos. Se pide:

1. Encontrar expresiones para el número medio de partículas por unidad de volumen en el estado fundamental y el número medio total de partículas en estados excitados, en función de la temperatura T y la fugacidad $\lambda = \mathrm{e}^{\beta\mu}$ del gas.
2. Encontrar las condiciones que han de cumplir el exponente s y la dimensión d para que el sistema muestre condensación de Bose-Einstein. Calcular la temperatura crítica cuando esto suceda.
3. Encontrar la ecuación de estado del gas bosónico.
4. Encontrar la población relativa del estado fundamental N_0/N en función de la temperatura del sistema, suponiendo que la densidad $n = N/V$ está fija.