Física Estadística

Relación 6: Sistemas ideales

Problema 1. El Hamiltoniano de una molécula diatómica contenida en un volumen V puede escribirse como la suma de tres términos, $H_1 = H_1^{\mathrm{tras}} + H_1^{\mathrm{vib}} + H_1^{\mathrm{rot}}$, con

$$H_1^{\mathrm{tras}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad , \quad H_1^{\mathrm{vib}} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}(r - r_0)^2 \quad , \quad H_1^{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2\mu r_0^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)$$

donde el término H_1^{tras} es la energía de traslación del centro de masas de la molécula, siendo m su masa total. El hamiltoniano H_1^{vib}, con r es la distancia interatómica y p_r su momento conjugado, describe las vibraciones armónicas de una partícula de masa μ (masa reducida de la molécula) alrededor de r_0, que es la distancia que minimiza la energía de interacción entre los átomos. Por último, el hamiltoniano de rotación H_1^{rot} es el de una masa puntual μ moviéndose sobre la superficie de una esfera de radio r_0. Calcule la función de partición y el calor específico de un gas ideal de N moléculas diatómicas.

Problema 2. Consideramos un sistema con un número variable de partículas clásicas indistinguibles, cada una de masa m, en una caja de volumen V. Para crear cada una de las partículas hay que suministrar una energía γ; una vez creada la partícula, pasa a formar parte de un gas ideal de volumen V. De esta forma la energía total del sistema con n partículas será igual a la energía cinética total más $n\gamma$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Se pide:

1. Usando la colectividad canónica, demostrar que la energía libre de Helmholtz se puede escribir como $F = -k_B T V X(T)$, donde $X(T) = \Lambda(T)^{-3} \mathrm{e}^{-\beta\gamma}$ y $\Lambda(T) = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ es la longitud de onda térmica.
2. Calcular la probabilidad de que haya n partículas en la caja y, a partir de esa probabilidad, el valor medio $\langle n \rangle$ de partículas.
3. Calcular la energía media y la ecuación de estado del sistema.

Problema 3. Una gota de aceite de masa m tiene una carga eléctrica e y realiza un movimiento *browniano* entre dos condensadores horizontales con separación L entre placas y una diferencia de potencial ε. Ignorando los efectos de tamaño finito, (1) construya la distribución de probabilidad en la colectividad canónica para la gota de aceite, (2) calcule la probabilidad de que la partícula esté a una altura z por encima del condensador inferior, y (3) a partir de ella calcule la altura media de la gota.

Problema 4. Considere un gas ideal ultra-relativista en dos dimensiones en equilibrio térmico a una temperatura extremadamente alta. En este caso, las energías de las partículas vienen dadas por $\varepsilon = pc$, siendo p el módulo del momento lineal y c la velocidad de la luz. Calcule el calor específico a volumen constante.