Física Estadística

Relación 1: Introducción a la Teoría de Probabilidad

Problema 1. Consideremos un gran número N de partículas distinguibles unas de otras que son introducidas en una caja. La caja está dividida por la mitad por una pared que las partículas pueden atravesar sin dificultad.

1. Calcula el número de "microestados" con n partículas en el lado izquierdo de la caja. ¿Cuál es la distribución de probabilidad asociada a tener n partículas en el lado izquierdo de la caja?
2. ¿Cuál es el macroestado más probable?
3. ¿Cómo son las fluctuaciones respecto a la media (varianza)?

Problema 2. Tenemos un recipiente con n bolas diferenciables unas de otras ¿Cuántas formas hay de seleccionar k bolas sin volver a introducirlas en el recipiente (sin repetición)?

1. Importando el orden en el que se seleccionen.
2. Sin importar el orden.
3. ¿Y si se introdujeran en el recipiente tras sacarlas (con repetición)?
4. ¿Cuántas formas hay de introducir todas las n bolas en k cajas diferentes unas de otras?
5. ¿Cuántas formas habría en el caso anterior si las bolas fueran idénticas e indistinguibles unas de otras?

Problema 3. Un dado está trucado de forma que la probabilidad de que el resultado de la tirada sea par es triple de que sea impar. Si tiramos el dado nueve veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga par cinco veces?

Problema 4. La distribución de Maxwell-Boltzmann para las componentes de la velocidad en un gas ideal viene dada por,

$$f_{\mathbf{v}}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right]$$

donde m es la masa de las partículas y k la constate de Boltzmann.

1. Calcula la distribución de probabilidad para el vector de momentos.
2. Calcula la distribución de probabilidad para el módulo de la velocidad.

Problema 5. Sean dos variables estocásticas X e Y, definidas ambas en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, y que obedecen una distribución gaussiana bidimensional, es decir,

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Se define $s = x^2 + y^2$ y ϕ el ángulo que forma el vector de componentes (x, y) con el semieje OX positivo (es decir, el ángulo polar habitual). Obtén la distribución de las nuevas variables, $P_2(s, \phi)$, precisando el rango de las mismas. ¿Son s y ϕ estadísticamente independientes?

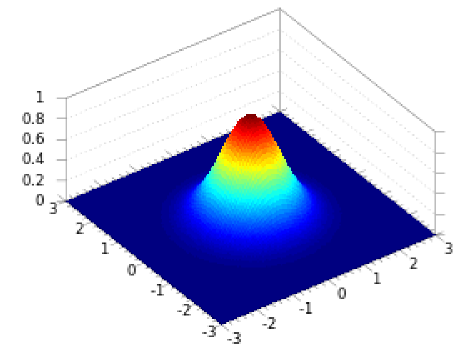

Figura 1. Gaussiana bidimensional

Problema 6. Dada la distribución de Gauss,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

con $-\infty \leq x \leq +\infty$, calcula todos sus momentos y cumulantes.

Problema 7. Obten los siguientes valores medios para la distribución de Maxwell-Boltzmann*,

$$\langle v_x \rangle, \ \langle v_x^2 \rangle, \ \langle v^2 v_x \rangle, \ \langle v_y v_x^3 \rangle, \ \langle (v_x + b v_y)^2 \rangle, \ \langle v_x^2 v_y^2 \rangle$$

Nota: Recuerda que la distribución de Maxwell-Boltzmann viene dada por,

$$\varphi(\vec{v}_i) \propto \alpha^{1/3} e^{-\beta v_i^2}, \quad \varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}_x)\, \varphi(\vec{v}_y)\, \varphi(\vec{v}_z)$$

Problema 8. Existen distribuciones de probabilidad denominadas leyes de potencias que siguen la distribución $f(x) \sim x^{-\alpha}$, definidas en cierto intervalo $x \in (x_{min}, +\infty)$ con $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Normaliza la distribución de probabilidad y calcula la condición para que exista el momento k-ésimo.

$*$ Emplearemos la integral $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$.