

Física Estadística

6. Introducción al gas ideal cuántico

Profesor: P.I. Hurtado¹

Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia, e Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Granada. E-18071 Granada. España

E-mail: phurtado@onsager.ugr.es

Web asignatura: <http://ic1.ugr.es/statphys>

Resumen. Sexto tema del curso de Física Estadística del Grado en Física de la Universidad de Granada. En este tema hacemos una breve introducción al gas ideal cuántico para alumn@s que aún no saben mucha física cuántica. Para ello discutimos el concepto de indistinguibilidad cuántica, y qué implica esto para la función de ondas que describe el sistema y sus simetrías. Esta discusión nos lleva de manera natural al formalismo de número de ocupación, a partir del cual ya podemos hacer una descripción efectiva del gas ideal cuántico con todos sus matices.

Referencias

- [1] J.J. Brey Abalo et al, *Mecánica Estadística*, UNED, Madrid (2001).
- [2] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics (2nd edition)*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1996).
- [3] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley and Sons, New York (1975).
- [4] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Física Estadística*, Reverté S.A., Madrid (1975).
- [5] L.E Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics (4th edition)*, Wiley and Sons, New York (2016).
- [6] J.J. Binney et al, *The Theory of Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford (1999).
- [7] R. Kubo, *Statistical Mechanics: an Advanced Course with Problems and solutions (2nd edition)*, North-Holland (1999).

* Copyright de estas notas: P.I. Hurtado, M.A. Muñoz, P.L. Garrido, J.J. Torres y J. Marro. Versión provisional en fase de mejora.

<i>ÍNDICE</i>	2
Índice	
1. Introducción	3
2. Sistemas cuánticos ideales	7
3. Ecuación de estado del gas ideal cuántico	9
4. Gas ideal cuántico débilmente degenerado	13

1. Introducción

- Un sistema cuántico de N partículas idénticas queda completamente descrito por su función de ondas:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; t) \quad (1)$$

que es solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \right] \Psi \quad (2)$$

dada una condición inicial.

- En un sistema cuántico, las partículas idénticas son *indistinguibles*. Esto implica que cualquier permutación entre las partículas del sistema representa en realidad el mismo estado físico (no podemos etiquetar las partículas), y tiene importantes implicaciones sobre la física del sistema, como veremos más adelante. Formalmente, esto se debe a que el operador Hamiltoniano del sistema H es invariante respecto al intercambio de etiquetas posición ($\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$).
- Para entender mejor esta propiedad, definamos ahora el operador $I(i, j)$ (con $i \neq j$) que intercambia etiquetas:

$$I(i, j)\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \Psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots). \quad (3)$$

Este operador de intercambio conmuta con el Hamiltoniano del sistema:

$$[H, I(i, j)] = 0 \quad (4)$$

- **Demostración:** Sean $\phi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ las funciones propias del Hamiltoniano, esto es:

$$H\phi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = E_n \phi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (5)$$

donde E_n son los valores propios del Hamiltoniano. Cualquier función de ondas se puede expresar en función de esta [base del espacio de Hilbert](#):

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_n a_n \phi_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (6)$$

con $a_n = \langle \phi_n | \Phi \rangle$ la proyección de la función de onda de interés sobre los vectores de la base. Aplicamos ahora los operadores H e $I(i, j)$:

$$\begin{aligned} HI(i, j)\Phi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) &= H\Phi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) = H \sum_n a_n \phi_n(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) \\ &= \sum_n a_n E_n \phi_n(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) = I(i, j) \sum_n a_n E_n \phi_n(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) \\ &= I(i, j)H\Phi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

Por lo que $[H, I(i, j)] = 0$. *q.e.d.*

- Al conmutar con el Hamiltoniano, el operador $I(i, j)$ es parte del [conjunto completo de observables compatibles](#) del sistema y, por lo tanto, [existe una base de funciones de ondas que son simultáneamente propias del Hamiltoniano y del operador \$I\(i, j\)\$](#) .
- Sea ψ una de esas funciones de ondas, que debe de cumplir simultáneamente:

$$H \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N) = E \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N),$$

$$I(i, j) \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N) = \theta \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N)$$

donde θ es el valor propio del operador $I(i, j)$.

- Observamos que si aplicamos dos veces el operador de permutación $I(i, j)$ sobre cualquier función de ondas, ésta queda invariante. En particular, las autofunciones conjuntas de H e $I(i, j)$ deben entonces cumplir:

$$I(i, j)^2 \psi = \theta^2 \psi = \psi, \quad (8)$$

por lo que deducimos que $\theta = \pm 1$, y por tanto

$$I(i, j) \psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \boxed{\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) = \pm \psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots)} \quad (9)$$

- Por tanto, **la función de ondas para un conjunto partículas idénticas sólo puede ser simétrica o antisimétrica bajo la permutación de dos partículas.**
- Notemos que esta propiedad **deja invariante a la densidad de probabilidad** de la configuración bajo esa permutación, y por tanto el estado físico no cambia si intercambiamos dos partículas idénticas:

$$|\psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots)|^2 = |\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots)|^2,$$

- ¿Qué pasa si dos partículas ocupan la misma posición ($\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$)?. En este caso tenemos

$$\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \theta \psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_j, \dots)$$

- Tenemos entonces **dos situaciones posibles**:
 - **$\theta = -1$** : en este caso $\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = -\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = 0$, luego la probabilidad de encontrar dos partículas en el mismo estado ($|\psi|^2$) es cero. Las partículas con esta propiedad se denominan **fermiones**. Éste es el conocido como **principio de exclusión de Pauli**.
 - **$\theta = +1$** : en este caso $\psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) \neq 0$ luego la probabilidad de encontrar a dos partículas en el mismo estado no es cero (genéricamente). Las partículas con esta propiedad se denominan **bosones**.

- El **teorema de conexión spin-estadística** relaciona el valor de θ con el valor entero o semi-entero del espín de las partículas (no lo demostramos aquí, se prueba usando herramientas de teoría cuántica de campos).
- De esta forma se pueden clasificar a las partículas según su espín (o equivalentemente según la simetría bajo permutaciones de su función de onda)

Bosones	espín	Fermiones	espín
partícula α	0	electrón	1/2
átomo He (est. fund.)	0	positrón	1/2
mesón π	0	protón	1/2
fotón	1	neutrón	1/2
deuterón	1	muón	1/2
ψ simétrica, $\theta = +1$		ψ antisimétrica, $\theta = -1$	

- Esta propiedad (i.e. si las partículas constituyentes son **bosones o fermiones**) juega un **papel esencial en las propiedades macroscópicas** de sistemas con muchos grados de libertad¹.

* Es importante recalcar que la simetría o antisimetría de la función de onda bajo permutaciones aplica sólo a sistemas de partículas idénticas. Por ejemplo, la probabilidad de encontrar un electrón en el punto x y un protón en y es diferente de la probabilidad de encontrar el protón en x y el electrón en y . Sin embargo, no podemos distinguir configuraciones donde el electrón "número uno" esté en x y el "número dos" en y de otra con el electrón "número uno" en y y el "número dos" en x , una distinción que en principio sí es legítima en una descripción clásica.

2. Sistemas cuánticos ideales

- Al igual que los sistemas clásicos ideales, los **sistemas cuánticos ideales** se definen como aquellos que tienen un operador hamiltoniano del tipo:

$$H(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i).$$

- En este caso, las autofunciones del hamiltoniano, solución de la ecuación de Schrödinger $H \Psi = E \Psi$, se pueden escribir genéricamente como **producto directo de soluciones monoparticulares**:

$$\Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi_{k_i}(\mathbf{r}_i) \quad \text{con} \quad E = \sum_{i=1}^N \epsilon(k_i)$$

donde los diferentes ψ y ϵ se obtienen de la solución de la ecuación de Schrödinger de una partícula:

$$h \psi_k = \epsilon(k) \psi_k$$

- Sin embargo, $\Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi_{k_i}(\mathbf{r}_i)$ **NO** tiene las propiedades de simetría adecuadas bajo el **intercambio de etiquetas de posición** (fijados los niveles energéticos n_i).
- Sabemos que debido a la simetría bajo permutaciones del hamiltoniano, la función de ondas del sistema debe de ser **simétrica o antisimétrica** bajo el intercambio de etiquetas en las coordenadas de posición. Esto se consigue **simetrizando o antisimetrizando la anterior solución de tipo producto**, lo que lleva a las siguientes opciones:

- **Fermiones:**

$$\Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(\mathbf{r}_1) & \psi_{k_1}(\mathbf{r}_2) & \cdot & \psi_{k_1}(\mathbf{r}_N) \\ \psi_{k_2}(\mathbf{r}_1) & \psi_{k_2}(\mathbf{r}_2) & \cdot & \psi_{k_2}(\mathbf{r}_N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_{k_N}(\mathbf{r}_1) & \psi_{k_N}(\mathbf{r}_2) & \cdot & \psi_{k_N}(\mathbf{r}_N) \end{vmatrix} \quad (10)$$

que es el llamado **determinante de Slater** (pensar el ejemplo de dos partículas para entender su origen).

- **Bosones:**

$$\Psi_{k_1, \dots, k_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = C \sum_P \hat{P}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \prod_{i=1}^N \psi_{k_i}(\mathbf{r}_i) \quad (11)$$

donde $\hat{P}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ es un operador que permuta las etiquetas y la suma se extiende sobre TODAS las posibles permutaciones de las mismas. C es la constante que normaliza la función de ondas.

- Cabe destacar que el **principio de exclusión de Pauli** en los sistemas ideales cuánticos se pueden interpretar de dos formas:
 - (1) Dos fermiones NO pueden estar en la misma posición espacial (tiene probabilidad cero de observarse).
 - (2) TODOS los estados energéticos monoparticulares deben de ser diferentes. De aquí la imagen de **llenado de niveles energéticos** cuando estamos tratando de un sistema ideal de fermiones.
- **Representación de números de ocupación:** De todo lo anterior observamos que para determinar el estado microscópico de un gas ideal cuántico es suficiente obtener los **niveles energéticos $\epsilon(k)$** del problema cuántico de una partícula y conocer el **número de partículas que se encuentran en cada nivel, $n(k)$** . Con esos datos podemos reconstruir la función de ondas colectiva del sistema. De esta forma:

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} n(i)\epsilon(i), \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} n(i)$$

donde el carácter bosónico o fermiónico queda reflejado por el hecho que la ocupación de los niveles energéticos es diferente en cada caso:

$$\text{Bosones: } n(i) = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{Fermiones: } n(i) = 0, 1$$

Desde el punto de vista de la física estadística de equilibrio **esta información es todo lo que necesitamos** para describir el comportamiento macroscópico de un sistema ideal cuántico.

3. Ecuación de estado del gas ideal cuántico

- Sea sistema cuántico de N partículas idénticas e independientes confinadas en un volumen V . El hamiltoniano del problema monoparticular es el de una partícula libre, y sus autoestados vienen dados por la solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] \phi(\mathbf{r}) = \epsilon \phi(\mathbf{r})$$

con la condición de contorno

$$\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \partial V$$

- Los niveles de energía monoparticulares están determinados por los valores propios del operador momento $\mathbf{p} = i\hbar \nabla$ y su cuantización, como ya vimos en el capítulo anterior: $\epsilon(\mathbf{k}) = \mathbf{p}^2/2m = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)/8mL^2$, donde k_x, k_y, k_z son las componentes del vector número de onda \mathbf{k} , que identifica unívocamente cada nivel cuántico.
- Un estado del sistema de muchas partículas vendrá dado por el conjunto de números de ocupación de los diferentes niveles, $\{n(\mathbf{k})\}$. La **función de partición canónica** viene dada entonces por:

$$Z_N(T, V) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\{n(\mathbf{k})\}} \exp \left[-\beta \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}) \right] \delta \left(\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}), N \right), \quad (12)$$

donde $\delta(i, j) \equiv \delta_{ij}$ es la delta de Kronecker, $\delta(i, j) = 1$ si $i = j$ mientras que $\delta(i, j) = 0$ en otro caso ($i \neq j$).

- **La sencillez de esta expresión es aparente**: la restricción en la suma, implementada con la delta de Kronecker para garantizar que el número total de partículas es constante, $N = \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k})$, impide que Z_N factorice como su análogo clásico. Esto refleja la existencia de **correlaciones cuánticas** asociadas con el principio de exclusión de Pauli, que hacen difícil el cálculo de la suma.

- Esta dificultad puede soslayarse utilizando la **colectividad macrocanónica**, cuya función de partición es:

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N(T, V) \quad (13)$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n(\mathbf{k})\}} \delta\left(\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}), N\right) e^{-\beta \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) n(\mathbf{k})} e^{\beta\mu \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k})} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n(\mathbf{k})\}} \delta\left(\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}), N\right) \exp\left(\beta \sum_{\mathbf{k}} (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) n(\mathbf{k})\right). \end{aligned}$$

- Ahora podemos realizar la suma sobre N de manera trivial y obtenemos:

$$\boxed{\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\mathbf{k}} \sum_{n(\mathbf{k})} \exp[\beta (\mu - \epsilon(\mathbf{k})) n(\mathbf{k})]} \quad (14)$$

- Para poder continuar debemos tener en cuenta el **tipo de partículas** que llenan los niveles energéticos:

- **Fermiones**: en este caso sólo es posible números de ocupación $n = 0$ ó $n = 1$, luego:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\mathbf{k}} \sum_{n=0}^1 e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))n} = \prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))})$$

- **Bosones**: $n = 0, 1, 2, \dots$, y por tanto

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\mathbf{k}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))n}}_{\substack{\text{serie geométrica} \\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}} = \prod_{\mathbf{k}} (1 - e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))})^{-1}$$

Nota: la convergencia de la serie geométrica anterior requiere que:

$$\exp[\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))] < 1 \quad \forall \epsilon(\mathbf{k}),$$

lo que implica que el potencial químico ha de ser menor que la energía $\epsilon(\mathbf{k}) = h^2\mathbf{k}^2/8mL^2$ de cualquiera de los niveles \mathbf{k} . Puesto que la energía mínima es cero, entonces **el potencial químico μ ha de ser negativo en el caso de bosones** para garantizar que la serie es convergente.

- Podemos tratar **los dos casos simultáneamente (fermiones y bosones)** usando el autovalor θ del operador de permutación:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\mathbf{k}} \left(1 - \theta e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))}\right)^{-\theta}, \quad \text{con} \quad \theta = \begin{cases} +1 & \text{bosones} \\ -1 & \text{fermiones} \end{cases}$$

- Observamos que el producto se extiende sobre **TODOS los niveles energéticos accesibles por una partícula, que son infinitos.**
- El gas ideal cuántico es un ejemplo en el que la colectividad macrocanónica es matemáticamente más conveniente que la colectividad canónica.**
- El **potencial macrocanónico** viene dado por:

$$PV(T, \mu) = k_B T \ln \Xi(T, V, \mu) = -\theta k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln \left\{1 - \theta e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))}\right\}$$

- Para sistemas macroscópicos ($L \rightarrow \infty$)** y dada una temperatura, los valores consecutivos de los niveles de energía están lo suficientemente próximos para **poder sustituir la suma sobre \mathbf{k} por una integral, $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d\mathbf{k}$.**
- ¡¡CUIDADO!!:** Esta aproximación es razonable en general salvo en el caso de un sistema de **bosones a muy bajas temperaturas** en el que todas las partículas pueden colapsar en el mismo estado fundamental.

- Puesto que $p_\alpha = \hbar k_\alpha / L$, con $\alpha = x, y, z$, entonces $d\mathbf{k} = V d\mathbf{p} / h^3$ y obtenemos:

$$PV = -\theta k_B T \frac{V}{h^3} \int d\mathbf{p} \ln \left\{ 1 - \theta e^{\beta(\mu - p^2/2m)} \right\}$$

Integrando sobre la parte angular y haciendo $x \equiv p^2/2mk_B T$, llegamos a

$$P(T, \mu) = -\pi \theta m^{3/2} (2k_B T)^{5/2} h^{-3} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \ln \left[1 - \theta e^{\beta\mu - x} \right]$$

Finalmente, integrando por partes y usando la definición de longitud de onda térmica, $\Lambda(T) = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$, se tiene

$$P(T, \mu) = \frac{2}{3} k_B T \Lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^{x-\beta\mu} - \theta}$$

- Reemplacemos μ por la densidad, definida como:

$$\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \frac{2}{3} \Lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2} e^{x-\beta\mu}}{(e^{x-\beta\mu} - \theta)^2} = \Lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^{x-\beta\mu} - \theta},$$

donde hemos integrado por partes para llegar a la última igualdad ($u = x^{3/2}$, $dv = dx e^{x-\beta\mu} / (e^{x-\beta\mu} - \theta)^2 \Rightarrow v = -1/(e^{x-\beta\mu} - \theta)$).

- Combinando la ecuación de la presión y la ecuación de la densidad se tiene la P en función de ρ y T , esto es, obtenemos la **ecuación de estado para un gas ideal cuántico (sin interacciones)**.
- Otras propiedades se siguen de aquí usando relaciones termodinámicas familiares. Por ejemplo, se encuentra

$$e(T, \mu) \equiv \frac{U}{V} = \frac{3}{2} P \quad \longrightarrow \quad PV = \frac{2}{3} U$$

que también satisface el **gas de Boltzmann** que sabemos que es el límite de un gas ideal cuántico cuando la temperatura tiende a infinito.

- No es fácil obtener ecuaciones de estado explícitas a partir de las ecuaciones paramétricas anteriores.

4. Gas ideal cuántico débilmente degenerado

- Estudiemos ahora las expresiones anteriores el caso asintótico de **fugacidades pequeñas**,

$$z \equiv e^{\beta\mu} \ll 1,$$

Como veremos más bajo, este límite se corresponde con **efectos cuánticos débiles**.

- En este límite tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^{x-\beta\mu} - \theta} &= \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{e^x z^{-1} - \theta} = \int_0^\infty dx x^{3/2} e^{-x} z (1 - \theta z e^{-x})^{-1} \\ &= \int_0^\infty dx x^{3/2} e^{-x} z (1 + \theta e^{-x} z + e^{-2x} z^2 + \dots) \end{aligned}$$

que conduce a

$$P = k_B T \Lambda^{-3} z \left(1 + \theta 2^{-5/2} z + 3^{-5/2} z^2 + \dots \right)$$

- De la misma forma, se tiene para la densidad en este límite que:

$$\rho = \Lambda^{-3} z \left(1 + \theta 2^{-3/2} z + 3^{-3/2} z^2 + \dots \right).$$

Invirtiendo ésta última expresión (usando el teorema de Lagrange para inversión de series) para obtener z en función de ρ , llegamos a

$$z = \Lambda^3 \rho \left[1 - \theta 2^{-3/2} \Lambda^3 \rho + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \Lambda^6 \rho^2 + \dots \right],$$

y sustituyendo en la serie para P , obtenemos finalmente

$$P = \rho k_B T \left[1 - \theta 2^{-5/2} \Lambda^3 \rho + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{3/2}} \right) \Lambda^6 \rho^2 + \dots \right] = \rho k_B T (1 - 0,1768 \theta \Lambda^3 \rho - 0,0033 \Lambda^6 \rho^2 + \dots)$$

- Esta expresión es un *desarrollo del virial* (esto es, en potencias de la densidad) característico de gases imperfectos (no ideales). Sin embargo, la desviación del comportamiento ideal en este caso es consecuencia de (débiles) efectos cuánticos, y no de interacciones entre las partículas.
- Vemos en la anterior ecuación que la primera corrección al comportamiento ideal tiene signo distinto para fermiones y bosones:
 - Fermiones ($\theta = -1$): la presión (para valores de ρ y T dados) es mayor que la del gas perfecto: es como si existiera una fuerza repulsiva adicional entre fermiones (consecuencia del principio de exclusión en un entorno cooperativo) que desfavoreciese configuraciones con partículas muy próximas entre sí.
 - Bosones ($\theta = +1$): la cooperatividad cuántica en este caso se manifiesta en un efecto como el que produciría una fuerza atractiva.
- Una vez realizada la aproximación, podemos entender mejor (a posteriori) su rango de validez y sentido físico. Del desarrollo anterior queda claro que el parámetro relevante (perturbativamente) resulta ser

$$\delta \equiv \Lambda^3 \rho = \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \rho,$$

también llamado *parámetro de degeneración*, y la convergencia del desarrollo exige que $\delta < 1$ y que sea pequeño. En particular, el límite del *gas de Boltzmann* se recupera para $\delta \ll 1$, esto es,

- para temperaturas altas (dada una densidad), o
 - para densidades bajas (dada una temperatura)
- Por otra parte, δ será mayor (implicando efectos cuánticos más notables) a mayor densidad, o cuanto menores sean T y/o m (la masa de las partículas implicadas), de modo que los efectos cuánticos serán más notables en moléculas ligeras a T 's bajas y/o a densidades altas.
 - Es el caso del **Helio**, en el que los efectos cuánticos llegan a manifestarse a nivel macroscópico. En el **Hidrógeno**, más ligero, las interacciones entre partículas son fuertes y sus efectos predominan sobre los puramente cuánticos; por el contrario, las interacciones son débiles en el Helio (un gas noble).
 - El desarrollo anterior diverge para δ grande. Es el caso de los **gases ideales cuánticos fuertemente degenerados**, que requieren un tratamiento distinto del presente, y **diferenciado para bosones y fermiones**, como se hace en lecciones siguientes.