

Física Estadística

7. Sistemas fermiónicos degenerados

Profesor: P.I. Hurtado¹

Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia, e Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional, Universidad de Granada. E-18071 Granada. España

E-mail: phurtado@onsager.ugr.es

Web asignatura: <http://ic1.ugr.es/statphys>

Resumen. Séptimo tema del curso de Física Estadística del Grado en Física de la Universidad de Granada. En este tema estudiamos el gas ideal de fermiones fuertemente degenerado, situación en la que dominan los efectos cuánticos. Introducimos el concepto de energía de Fermi y la distribución de Fermi-Dirac, para a continuación estudiar la física a bajas temperaturas del gas fermiónico fuertemente degenerado: ecuación de estado, propiedades termodinámicas, etc.

Referencias

- [1] J.J. Brey Abalo et al, *Mecánica Estadística*, UNED, Madrid (2001).
- [2] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics (2nd edition)*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1996).
- [3] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley and Sons, New York (1975).
- [4] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Física Estadística*, Reverté S.A., Madrid (1975).
- [5] L.E Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics (4th edition)*, Wiley and Sons, New York (2016).
- [6] J.J. Binney et al, *The Theory of Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford (1999).
- [7] R. Kubo, *Statistical Mechanics: an Advanced Course with Problems and solutions (2nd edition)*, North-Holland (1999).

* Copyright de estas notas: P.I. Hurtado, M.A. Muñoz, P.L. Garrido, J.J. Torres y J. Marro. Versión provisional en fase de mejora.

<i>ÍNDICE</i>	2
Índice	
1. Gas ideal de fermiones degenerado: energía de Fermi	3
2. Ecuación de estado a bajas temperaturas. Calor específico	8
3. Gas ideal de fermiones degenerado relativista: modelo de Chandrasekhar de las estrellas enanas blancas	14
3.1. Gas relativista de Fermi completamente degenerado	19
4. Gas electrónico en metales	27
4.1. Modelo de Sommerfeld	28
5. Rango de validez del gas ideal de fermiones	31

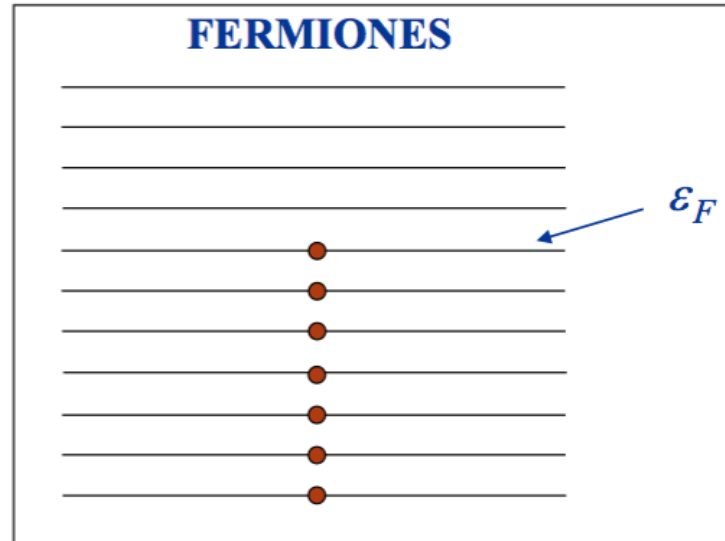
1. Gas ideal de fermiones degenerado: energía de Fermi

- Como vimos en el capítulo anterior, un **caso interesante** del gas ideal cuántico ocurre para bajas temperaturas T y/o altas densidades ρ , esto es para **valores altos del parámetro de degeneración**:

$$\delta = \rho \Lambda^3 = \rho \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2}$$

- Se dice que en este caso el gas está **fuertemente degenerado** ($\delta \gg 1$): los efectos cuánticos se manifiestan con intensidad, y es necesario estudiar los casos de **fermiones y bosones por separado**. Primero estudiaremos el **gas de fermiones fuertemente degenerado**.
- Si con $\rho = \text{cte}$ disminuimos la T hacia 0, la distribución de fermiones tiende a **minimizar la energía total** (ya que en este límite $A = U - TS \underset{T \rightarrow 0}{\approx} U$). Sin embargo, al ser fermiones, las partículas no pueden acumularse en el estado fundamental (debido al principio de exclusión de Pauli), por lo que **la distribución más favorable consistirá en la ocupación sucesiva de cada nivel energético** (contando su degeneración g) empezando por el de mínima energía.
- La **energía de Fermi**, ϵ_F , se define como la energía del nivel más alto que se alcanza de este modo, suponiendo que tenemos un **gas ideal**.
- Calculemos ahora el **número medio de ocupación de un nivel energético** dado. Para ello, recordemos del capítulo anterior la **función de partición macrocanónica del una gas ideal cuántico** genérico:

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{\mathbf{k}} \left(1 - \theta e^{\beta(\mu - \epsilon(\mathbf{k}))} \right)^{-\theta}, \quad \text{con} \quad \theta = \begin{cases} +1 & \text{bosones} \\ -1 & \text{fermiones} \end{cases}$$



- El potencial macrocanónico, una vez particularizado al caso de fermiones ($\theta = -1$), se escribe por tanto como

$$VP(T, \mu) = k_B T \ln \Xi(T, V, \mu) = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - \epsilon(\mathbf{k})}{k_B T} \right) \right],$$

y el promedio del número total de partículas es simplemente

$$\langle N \rangle = k_B T \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} = \sum_{\mathbf{k}} \langle n(\mathbf{k}) \rangle$$

donde en la última igualdad sólo reflejamos que el número medio de partículas en el sistema no es más que la suma del número medio de partículas en cada uno de los niveles energéticos. Notemos que la energía de una partícula cuántica sin interacción viene completamente determinada por el vector \mathbf{k} o equivalentemente por su momento \mathbf{p} , por lo que podemos usar cualquiera de los dos para etiquetar los diferentes niveles de energía.

- Haciendo la anterior derivada y comparando el resultado con la suma genérica sobre las ocupaciones medias de los distintos niveles, llegamos a

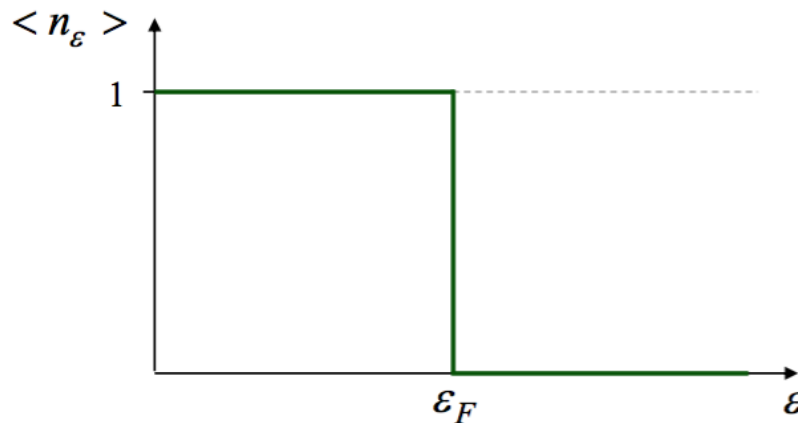
$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1},$$

que define la **distribución de Fermi-Dirac** y que caracteriza el **número medio de ocupación de los niveles de un gas ideal de fermiones**.

- A **temperaturas muy bajas**, $T \rightarrow 0$, ya hemos discutido antes que las partículas ocuparán todos los niveles de energía más baja, hasta cierto nivel que define la energía de Fermi, por lo que la distribución anterior de partículas debe converger a

$$\langle n_p \rangle \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p), \quad (1)$$

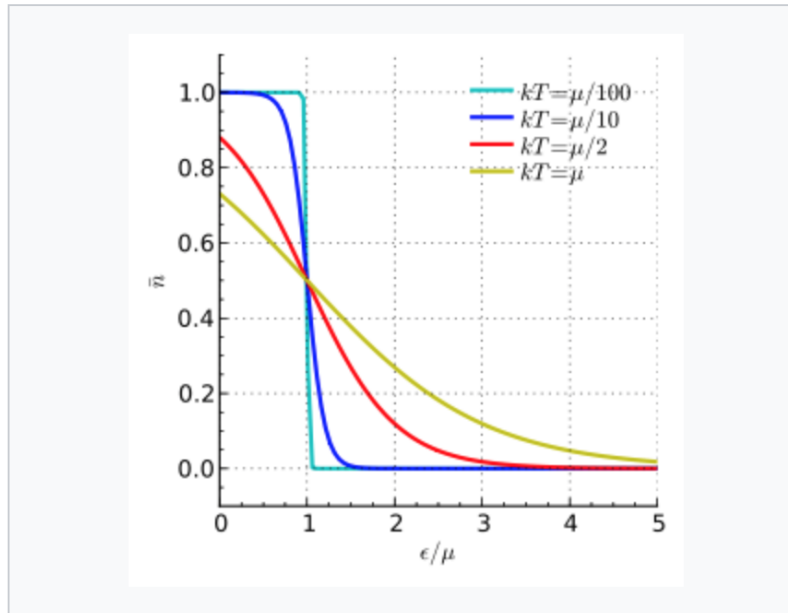
siendo Θ la **función paso de Heaviside**:



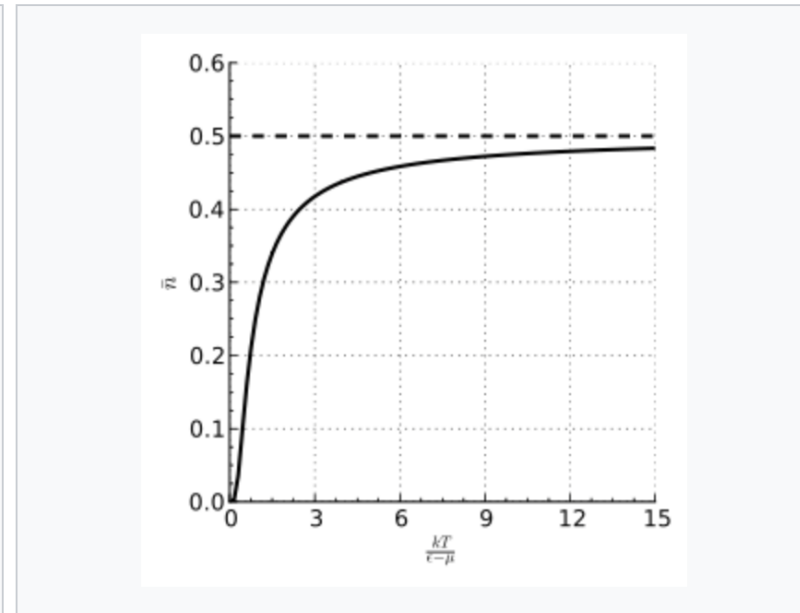
$$\langle n_\epsilon \rangle = \theta(\epsilon_F - \epsilon)$$

$$\epsilon_F = \mu$$

Fermi-Dirac distribution



Energy dependence. More gradual at higher T . $\bar{n} = 0.5$ when $\epsilon = \mu$.
Not shown is that μ decreases for higher T .^[16]



Temperature dependence for $\epsilon > \mu$.

- Si hacemos ahora este límite de temperaturas bajas, $T \rightarrow 0$, en la distribución de Fermi-Dirac anterior (que equivale a hacer $\beta = 1/k_B T \rightarrow \infty$) vemos que

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_p < \mu \\ 0 & \text{si } \epsilon_p > \mu \end{cases} .$$

- Vemos por tanto que recuperamos la función paso de Heaviside, como cabría esperar. Se deduce además que, necesariamente, la densidad de energía libre de Gibbs o potencial químico $\mu(T)$ tiene la propiedad:

$$\mu(T = 0) = \epsilon_F$$

- Para determinar de manera sencilla el valor de la **energía de Fermi**, estudiemos ahora la **densidad del gas en el límite de bajas temperaturas, $T \rightarrow 0$** , a partir de la ecuación de estado del gas ideal cuántico. Sabemos del capítulo anterior que, en el caso de fermiones ($\theta = -1$):

$$\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3 \beta^{3/2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^{(x-\beta\mu)} + 1},$$

donde hemos escrito explícitamente la longitud de onda térmica $\Lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$.

- Definiendo por simplicidad la constante $C \equiv \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3}$, realizando en la integral anterior el cambio de variable $\epsilon = x/\beta$, y haciendo el límite $\beta \rightarrow \infty$ (o equivalentemente $T \rightarrow 0$) obtenemos

$$\rho = C \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} C \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p) = C \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{1/2} = \frac{2C}{3} \epsilon_F^{3/2},$$

luego la energía de Fermi se puede escribir como:

$$\epsilon_F = \left(\frac{3}{2C} \rho \right)^{2/3} = (6\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3}. \quad (2)$$

- Se define el **momento de Fermi** (para el caso no relativista, pues en el relativista la relación energía-momento es distinta) a partir de la relación $\epsilon_F = p_F^2/2m$, de donde

$$p_F \equiv \sqrt{2m\epsilon_F} = (6\pi^2)^{1/3} \hbar \rho^{1/3}$$

- Es interesante notar cómo **el momento de los fermiones en el cero absoluto de temperatura es alto** en general. Esto hace que el gas de fermiones completamente degenerado sea un buen modelo, al menos cualitativo, para algunas situaciones físicas... como veremos.

- Haciendo el cálculo análogo al de ρ , pero para la presión P , la integral da trivialmente un resultado proporcional a $\epsilon_F^{5/2}$, y por lo tanto $P \sim \rho^{5/3}$ que no coincide con el límite clásico. En este límite cuántico altamente degenerado la presión (fermiónica) aumenta mucho más rápidamente con la densidad de lo que ocurre en un gas clásico. Esto es una consecuencia de la “repulsión fermiónica” o “presión de degeneración”. Se trata de un efecto puramente cuántico.

2. Ecuación de estado a bajas temperaturas. Calor específico

- Después de haber calculado el límite de temperatura cero, nos interesa obtener el comportamiento a bajas temperaturas del gas ideal de fermiones cuántico.
- En particular, queremos estudiar como los distintos observables cambian con la temperatura, y así poder medir magnitudes como el calor específico (derivada de $U(T, V, N)$ respecto a T) a bajas T 's.
- Comenzamos calculando la presión y la densidad, que como ya vimos vienen dados para fermiones por:

$$P = 8\pi \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{3h^3} I(3/2)$$

$$\rho = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} I(1/2)$$

donde hemos definido la integral genérica

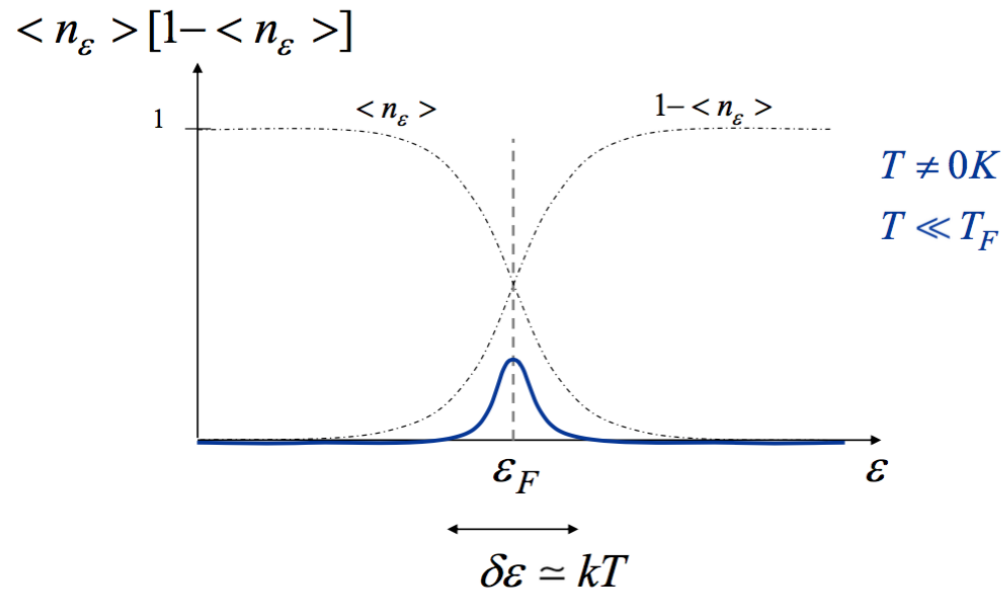
$$I(\alpha) = \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^\alpha}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1}$$

- Estudiemos el [comportamiento de la integral a bajas temperaturas](#), pero en un caso algo más general:

$$I = \int_0^\infty d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1}$$

donde $f(\epsilon)$ es una función arbitraria tal que $\int d\epsilon f(\epsilon) \Big|_0 = 0$. Conviene recordar que el término que acompaña a la función $f(\epsilon)$ en la integral no es más que la [distribución de Fermi-Dirac \$\langle n\(\epsilon\) \rangle\$](#) que ya vimos antes.

- Nótese que si T es pequeña (β grande pero finita) algunos fermiones pueden absorber energía térmica para [excitarse](#) y abandonar el [mar de Fermi](#), esto es, tener energías por encima de ϵ_F . En este caso [la función paso que caracteriza la distribución de Fermi-Dirac a \$T = 0\$ se suaviza un poco cerca de la energía de Fermi](#), dando paso a una [curva sigmoide](#) que decae rápidamente a cero en un rango de energías del orden de $\delta\epsilon \approx k_B T$.



- Volviendo a la integral que nos interesa, a temperaturas suficientemente bajas (gases suficientemente degenerados) ésta puede escribirse (integrando por partes):

$$I = \beta \int_0^\infty d\epsilon G(\epsilon) \frac{\exp[\beta(\epsilon - \mu)]}{\{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1\}^2}$$

con $G(\epsilon) = \int_0^\epsilon dz f(z)$. Observemos que ahora el término del integrando que acompaña a la función G no es otra cosa que $\langle n(\epsilon) \rangle [1 - \langle n(\epsilon) \rangle]$. Como se ve en la figura anterior, esta función es positiva, picuda y no nula en una región de tamaño $\delta\epsilon \approx k_B T$ entorno a la energía de Fermi ϵ_F .

- Realizamos ahora el cambio de variables $\beta(\epsilon - \mu) = y$:

$$I = \int_{-\beta\mu}^\infty dy G\left(\frac{y}{\beta} + \mu\right) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

La función $g(y) = e^y / (e^y + 1)^2$ hereda la forma picuda y localizada de su predecesora, esta vez en torno a $y = 0$, y que decrece exponencialmente rápido para $|y| \rightarrow \infty$. De esta forma los valores de y que contribuyen de manera relevante a la integral son los que toman valores cercanos al cero.

- Así para temperaturas pequeñas podemos desarrollar G en serie de potencias en torno a $y = 0$, siendo los primeros términos del desarrollo los más relevantes. Este desarrollo estará bien definido para $T \rightarrow 0$. Así:

$$I = \int_{-\beta\mu}^\infty dy \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{y^n}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \int_{-\infty}^\infty dy y^n \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}$$

donde hemos reemplazado $-\beta\mu$ por $-\infty$ puesto que estamos a bajas T 's ($\beta \rightarrow \infty$) y el error es exponencialmente pequeño (esto se puede demostrar rigurosamente).

- Notamos ahora que el cociente de exponenciales en el integrando es una función par, por lo que **sólo las potencias pares en y del desarrollo dan integrales no nulas**:

$$I = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{\beta^{2n}} G^{(2n)}(\mu) 2 \int_0^\infty dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

- Para $n = 0$, la integral resultante da simplemente $\int_0^\infty dy \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = \frac{1}{2}$, y para $n > 0$ se tiene integrando por partes:

$$\int_0^\infty dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = 2n \int_0^\infty dy \frac{y^{2n-1}}{(e^y + 1)^2} = (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} B_n$$

donde B_n son los números de Bernoulli¹

- Finalmente, tenemos para la **integral** que nos interesa

$$I \simeq \underbrace{\int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon)}_{G^{(0)}(\mu)} + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{(2n)!} (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} B_n (k_B T)^{2n} f^{(2n-1)}(\mu)$$

* **Wikipedia**: Históricamente, los números de Bernoulli surgieron de los intentos de obtener una forma cerrada de la suma de potencias de números naturales, $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + \dots + n^p$. Las formas cerradas de la expresión son siempre polinomios en n de orden $p + 1$. Los coeficientes de estos polinomios están relacionados con los números de Bernoulli a través de la fórmula de Bernoulli:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}.$$

Los números de Bernoulli se pueden definir también a partir de su función generatriz, $\mathcal{G}(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^\infty B_n \frac{t^n}{n!}$, donde cada coeficiente B_n de la serie de Taylor es el n -ésimo número de Bernoulli.

cuyos **primeros términos** producen:

$$I = \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (k_B T)^4 f'''(\mu) + \dots,$$

- Particularizando para $f(\epsilon) = \epsilon^\alpha$, con $\alpha = 1/2$ y $3/2$ tal y como obteníamos para la densidad y la presión, llegamos a:

$$P = 8\pi \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{3h^3} \left[\frac{2}{5} \mu^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} (k_B T)^2 \mu^{1/2} + O(T^4) \right]$$

$$\rho = \pi 2^{5/2} \frac{m^{3/2}}{h^3} \left[\frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \mu^{-1/2} + O(T^4) \right]$$

- Observamos que **a temperatura cero $P \propto \rho^{5/3}$** , que **NO coincide con el límite clásico** en el límite de bajas temperaturas o altas densidades, como ya explicamos.
- En gases de fermiones es **conveniente trabajar con la energía de Fermi ϵ_F** (que definimos anteriormente para $T = 0$) en lugar de la densidad. Así:

$$\epsilon_F = (6\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \rho^{2/3} = \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{2/3}$$

- Inviertiendo la relación anterior (usando $(1+x)^{-n} \approx 1 - nx + \dots$) y cortando el desarrollo a primer orden se tiene:

$$\mu = \epsilon_F \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{-2/3} \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde, haciendo $\mu(T) \simeq \epsilon_F + \dots$, con $\epsilon_F = \mu(T = 0)$ como ya vimos, tenemos (indicando sólo hasta segundo orden en T):

$$\mu(T) = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad \text{para bajas } T\text{'s}$$

- Podemos obtener más información termodinámica relevante a partir de esta expresión y de la ecuación $P = P(T, \mu)$. Por ejemplo, recordando que para todo gas ideal no-relativista $P = \frac{2}{3}e$, siendo e la densidad de energía, se obtiene

$$e = \frac{3}{5}n\epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

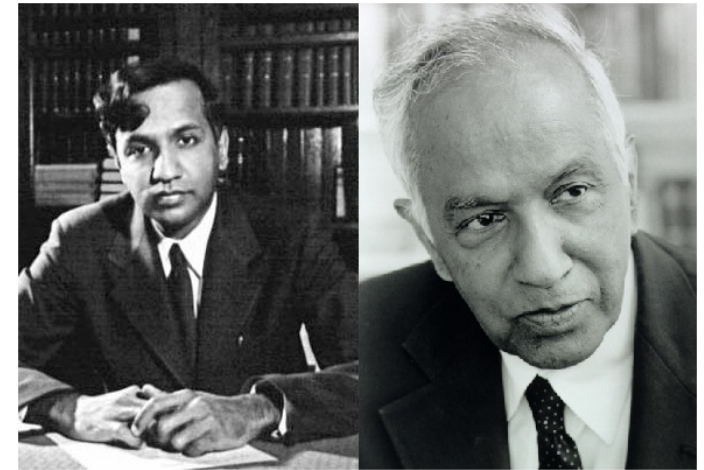
de donde, a T 's bajas, el **calor específico por partícula** es

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_n = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} k_B,$$

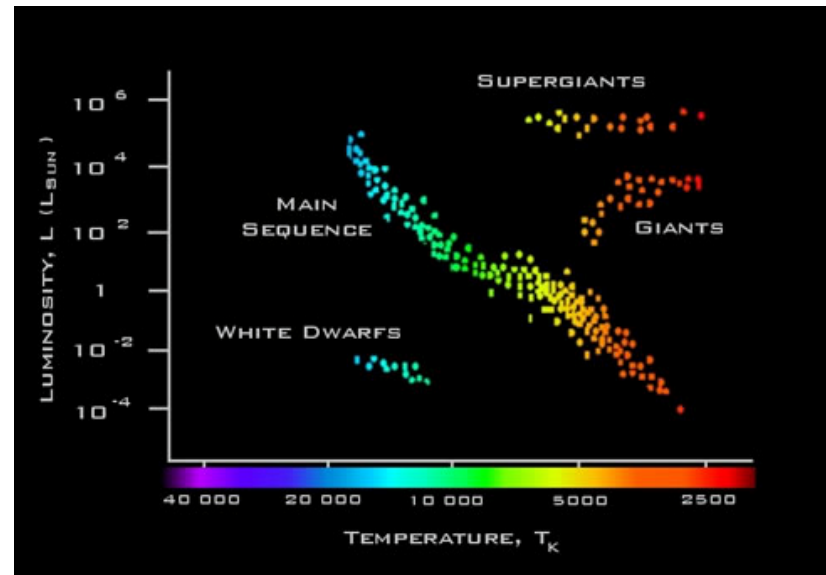
esto es, $c_V \sim T$ para $T \rightarrow 0$ que es el **comportamiento típico de los fermiones a bajas temperaturas**.

3. Gas ideal de fermiones degenerado relativista: modelo de Chandrasekhar de las estrellas enanas blancas

- Históricamente la [primera aplicación de la teoría de Fermi](#) es debida a [R.H. Fowler \(1926\)](#) que trata de explicar los distintos tipos de evolución que han podido tener distintos tipos de [estrellas](#) partiendo de la hipótesis de que se establece un estado de equilibrio en su interior.
- Este desarrollo es completado por [S. Chandrasekhar \(1939, Nobel 1983\)](#); con la adición de algunos hechos más recientes, es todavía la descripción standard. Bibliografía: S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1939; *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Pub., NY 1960.
- En 1930, Chandrasekhar ingresó en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, Inglaterra. Por aquel entonces leyó uno de los libros de Arthur Eddington, *The Internal Constitution of Stars*, que le influyó profundamente. En dicho libro, Eddington sostenía que las estrellas acababan sus vidas transformadas en objetos pequeños del tamaño de la Tierra y conocidos como [enanas blancas](#), tras agotar sus fuentes de energía.
- Chandrasekhar incluyó en sus cálculos [efectos de tipo cuántico y relativistas](#), concluyendo que tan sólo las estrellas de baja masa podían terminar sus vidas tal y como Eddington había planteado. Sus cálculos más elaborados mostraban que las estrellas de masa superior a [1.4 veces la masa de nuestro Sol](#) colapsarían por debajo del tamaño terrestre en ausencia de una fuente interna de calor. Este límite se conoce como [límite de Chandrasekhar](#). Sus descubrimientos apuntaban a la formación de [estrellas de neutrones y agujeros negros](#). (Wikipedia)



Subramanian Chandrasekhar



- El **diagrama de Hertzsprung-Russell** tiene un gran valor indicativo del proceso evolutivo seguido por una estrella típica. En este esquema se representa el logaritmo de la luminosidad de una estrella frente a su temperatura (ver figura), y de él se deduce que la mayor parte de las estrellas ($\sim 90\%$) pertenece a una franja bien definida, la **secuencia principal**. Esto implica cierta correlación entre brillo y color (las estrellas blancas son más luminosas, mientras que las rojizas lo son menos).
- Nótese que **las enanas blancas son una excepción clara a esta regla**. La razón es que estas estrellas son relativamente viejas y han **agotado su contenido de Hidrógeno** (a estas alturas las enanas blancas **prácticamente sólo contienen Helio**), lo que hace que el ritmo de las reacciones nucleares en su interior decaiga considerablemente. Su **brillo (débil) deriva principalmente de la energía gravitatoria liberada por la lenta contracción** de estas enanas blancas.
- Se puede caracterizar el brillo de una estrella como el logaritmo de la **luminosidad real** (la luminosidad aparente medida desde la Tierra y corregida con la distancia a la estrella). La **temperatura** en la superficie de una estrella se

puede relacionar con su color mediante un **índice de color** (una relación entre medidas fotoeléctricas de radiación emitida en bandas bien definidas del espectro, ej. en zonas ultravioleta, azul y amarilla).

- Una **pregunta interesante** tiene que ver con la **interpretación estática o dinámica del diagrama de Hertzsprung-Russell**: ¿El 90 % de las estrellas pertenecen *siempre* a la secuencia principal, o en cambio todas las estrellas pasan el 90 % de su vida en la secuencia principal?
- Hoy en día sabemos que **una estrella atraviesa distintas etapas evolutivas a lo largo del diagrama de Hertzsprung-Russell**, dependiendo de su masa principalmente y otros factores como su metalicidad, velocidad de rotación, entorno, etc. A lo largo de esta evolución, controlada por la **competición entre diferentes procesos (contracción gravitatoria, fusión, expansión debida a degeneración cuántica, etc.)**, se puede pasar de una gran nube de hidrógeno inicial a una pequeña enana blanca, supernova, estrella de neutrones, agujero negro, etc.
- De las observaciones empíricas se concluye que **existen (esencialmente) tres clases de estrellas**:
 - **Estrellas de la secuencia principal**: nuestro Sol es un ejemplo. Tiene un radio $R_S = 7 \times 10^8$ m, masa $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg, luminosidad $L_S = 3,8 \times 10^{26}$ w y una temperatura en su superficies de $T_S = 6000$ K (su densidad media es comparable a la del agua, $\simeq 1,4$ g cm⁻³). En la secuencia principal todas las estrellas tienen masas que van desde $0,1 M_S$ hasta $100 M_S$. El Sol está compuesto de hidrógeno, el 28 % de su masa consiste en núcleos de ⁴He y un 2 % de otros elementos ligeros. El número total de protones es de 10^{57} .
 - **Estrellas Enanas Blancas**: tienen masas entre $0,5 M_S$ y $1,4 M_S$ y un radio típico de 5×10^6 m (como la Tierra). Su densidad es del orden de 10^6 g cm⁻³.
 - **Estrellas de neutrones**: tienen masas del orden de $1,4 M_S$ y un radio de 10Km por lo que su densidad es comparable a la del núcleo atómico: 3×10^{14} gcm⁻³. Cuando la masa de la estrella de neutrones es superior a $3 M_S$ se cree que colapsan en agujeros negros.

- El objetivo de esta sección es estudiar dentro del contexto del gas ideal de Fermi completamente degenerado un **modelo idealizado de estrella enana blanca** que supondremos están formadas esencialmente por Helio y tienen las siguientes características:
 - Temperatura central $T \approx 10^7$ K a la que corresponde una energía térmica $k_B T \approx 10^3$ eV. A esta temperatura **todo el Helio está ionizado**.
 - Masa $M \approx 10^{33}$ gr.
 - Densidad de masa $\rho \approx 10^7$ gr/cm³. Nótese que para el Sol, M y T son comparables, pero su densidad es $\rho \approx 1$ gr/cm³.
- Si **suponemos** que toda la masa M es de helio (2e+2p+2n), podemos suponer que **la enana blanca está formada por N electrones (de masa m) y $N/2$ núcleos de helio (de masa $2m_p + 2m_n \simeq 4m_p$)**. De esta forma, tenemos para la **masa** de la enana blanca que

$$M \simeq Nm + \frac{N}{2}4m_p = N(m + 2m_p) \simeq 2Nm_p.$$

La **densidad de electrones** será

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} = \frac{10^7 \text{gr/cm}^3}{3/4 \times 10^{24} \text{gr}} \sim \mathcal{O}(10^{30} \text{electrones/cm}^3),$$

mientras que el **momento de Fermi** será del orden

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar \approx 10^{10} \times 10^{-27} \sim \mathcal{O}(10^{-17} \text{gr cm/s}),$$

de donde la **energía de Fermi** queda

$$\epsilon_F = p_F^2/2m \sim \mathcal{O}(10^{-7} \text{ergios}) = \mathcal{O}(10^5 \text{eV}),$$

y la **temperatura de Fermi**:

$$T_F \equiv \epsilon_F/k \sim \mathcal{O}(10^{10} \text{ K})$$

- Observamos que p_F es comparable al momento de un electrón relativista ($mc \simeq 9 \times 10^{-28} \text{ gr} \times 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \approx 10^{-17} \text{ gr cm/s}$), y ϵ_F es comparable a la energía en reposo mc^2 del electrón. **Por tanto se deduce que la dinámica de los electrones en las enanas blancas es relativista.**
- Observamos también que la temperatura T de la enana blanca es muy inferior a la de Fermi ($T_F/T \sim 10^3$), a pesar de estar muy por encima de las temperaturas típicas en la Tierra, de modo que **el gas de electrones está fuertemente degenerado.**
- Por último, como la masa del neutrón y del protón es del orden de 10^4 veces la del electrón, su longitud de onda térmica $\Lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ es 100 veces más pequeña que la del electrón, por lo que el factor de degeneración $\delta = \rho \Lambda^3$ asociado a los nucleones es 10^{-6} veces el de los electrones de la enana blanca.
- En consecuencia, **los núcleos (bosónicos) pueden describirse usando la estadística de Boltzmann**, mientras que **los electrones han de tratarse con la estadística de Fermi-Dirac en el límite de alta degeneración.**
- Estas observaciones sugieren que el **modelo idealizado** de una estrella enana blanca es **un gas de Fermi muy degenerado** (esto es, en el estado fundamental) formado por **N electrones relativistas** que se mueven en el **campo creado por $N/2$ núcleos de helio**, supuestos sin movimiento, que proporcionan la cohesión gravitatoria¹.
- Desde manera general, la física de la enana blanca estará controlada por la **competición** entre estos efectos:
 - Tendencia a la **contracción gravitatoria** hacia el centro de la estrella.
 - Presión hacia fuera debida al gran momento medio que tienen los electrones (**presión de degeneración**).

* También supondremos por simplicidad que el gas de electrones se distribuye *homogéneamente* por la estrella. ésta es una aproximación bastante cruda que sin embargo esperamos que ofrezca resultados correctos a nivel cualitativo.

3.1. Gas relativista de Fermi completamente degenerado

- Como ya hemos visto, [la dinámica de los electrones en la enana blanca es relativista](#). Recordemos brevemente ahora algunas expresiones útiles de relatividad especial.

Empecemos con la famosa fórmula de Einstein, $E = m_e c^2$, que relaciona la masa de una partícula con su energía, siendo c la velocidad de la luz. El momento relativista se puede escribir como

$$p = m_e v = \gamma m v = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m es la masa en reposo de la partícula y $m_e = \gamma m$ es la masa relativista efectiva. A partir de esta expresión podemos dar una expresión alternativa de la energía relativista en términos del momento. Para ello reescribamos la magnitud pc , muy usual en mecánica relativista:

$$p^2 c^2 = \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 \frac{v^2}{c^2} c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^4 (\frac{v^2}{c^2} - 1)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m^2 c^4 + \underbrace{(m_e c^2)^2}_{E^2},$$

donde hemos sumado y restado 1 en la penúltima expresión. Reagrupando términos, obtenemos la expresión de la [energía de una partícula relativista en términos del momento](#):

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m c^2)^2}.$$

- Con estas ideas claras, estudiemos las propiedades del estado fundamental de un **gas de Fermi completamente degenerado compuesto de N electrones relativistas**. En primer lugar, ya sabemos que la distribución de Fermi-Dirac en el límite de alta degeneración será una **función paso** que cae a cero en la energía de Fermi (o equivalentemente en el momento de Fermi p_F): **todas las partículas llenan los niveles de más baja energía consecutivamente**. Por tanto, debe cumplirse que:

$$N = \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_F^3,$$

donde hemos supuesto una **degeneración $g = 2$ debido al espín** del electrón y una **descripción continua** (válida para sistemas macroscópicos).

- Escribimos ahora la **energía cinética** de una partícula relativista como su energía total menos la energía asociada a su masa en reposo (mc^2):

$$\epsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} = mc^2 \left[(1 + \sinh^2 \theta)^{1/2} - 1 \right] = mc^2 (\cosh \theta - 1)$$

donde hemos definido una **nueva variable adimensional θ** a través de la relación **$p \equiv mc \sinh \theta$** . Para la **velocidad de la partícula**, podemos escribir:

$$u \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{2pc^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = c \frac{p/mc}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} = c \tanh \theta$$

- Del capítulo anterior, sabemos que **la presión del gas ideal de fermiones obedece la ecuación $P = 2\epsilon/3$** (independientemente del tipo de estadística –Boltzmann, Fermi-Dirac, o Bose-Einstein–, de si la dinámica es relativista o no, etc.). Por tanto podemos escribir:

$$P \equiv \frac{1}{3} \frac{M}{V} \langle u u \rangle = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \langle u u \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle p u \rangle$$

- En el caso completamente degenerado (muy bajas temperaturas), cuando la distribución de Fermi-Dirac es una función paso, tenemos que:

$$\langle p \ u \rangle_0 = \frac{2 \sum_{|\mathbf{p}| < p_F} pu}{2 \sum_{|\mathbf{p}| < p_F} 1} = \frac{2V}{h^3} \frac{\int_0^{p_F} pu \ 4\pi p^2 dp}{N} = \frac{8\pi V}{h^3 N} \int_0^{p_F} \frac{p^2/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} p^2 dp.$$

de donde se sigue la siguiente expresión para la *presión de degeneración* (o presión a temperatura cero):

$$P_0 = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} p^2 dp \implies P_0 = \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta \ d\theta$$

donde hemos realizado el cambio a la variable adimensional θ antes definida, y el límite θ_F queda definido a partir de la relación $p_F \equiv mc \sinh \theta_F$.

- Otra forma de obtener la presión es a partir de la *energía total del gas de electrones*, que en el cero absoluto de temperatura se puede escribir como

$$E_0 = 2 \sum_{|\mathbf{p}| < p_F} \epsilon(p) \simeq \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon \ 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^2 \theta (\cosh \theta - 1) \cosh \theta \ d\theta.$$

- La presión de degeneración se puede calcular a partir de $P_0 = -\partial E_0 / \partial V$, teniendo en cuenta que en la expresión anterior θ_F depende de V , ya que como vimos al principio de esta sección $p_F^3 = \frac{3h^3 N}{8\pi V}$. Este camino lleva a la misma expresión integral para P_0 .
- El resultado de hacer la integral es:

$$P_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x) \quad \text{con} \quad x \equiv \sinh \theta_F = \frac{p_F}{mc} = (3\pi^2 n)^{1/3} \frac{\hbar}{mc},$$

donde hemos definido $n = N/V$, y donde la **nueva función** $A(x)$ se define como:

$$A(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \operatorname{senh}^{-1} x$$

- El **comportamiento asintótico** de $A(x)$ es:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{22}x^{11} + \dots, & x \ll 1 \\ 2x^4 - 2x^2 + 3\left(\ln 2x - \frac{7}{12}\right) + \frac{5}{4x^2} + \dots, & x \gg 1 \end{cases} \begin{cases} \text{no relativ.} \\ mc \gg p_F \\ \text{relativista} \\ mc \ll p_F \end{cases}$$

- Es importante notar que la variable x definida anteriormente depende de la densidad n de la estrella. Por tanto, las ecuaciones anteriores establecen una **relación funcional entre la presión de degeneración P_0 y el radio R de la enana blanca**, suponiendo que ésta es esférica $\implies P_0(R)$.
- Como consecuencia de la discusión anterior, vemos que para una estrella de masa M dada, P_0 aumenta rápidamente al disminuir R tanto si la estrella es relativista como si no. Podemos entonces preguntarnos por el **estado en el que se compensa $P_0(R)$ con la presión debida a la atracción gravitatoria**.
- El **gas uniforme de fermiones ejerce una presión $P_0(n)$ sobre unas paredes imaginarias**. Estas paredes imaginarias las define un agente externo (que en este caso es la interacción gravitatoria de la propia estrella).
- Podemos definir ahora la **energía de degeneración** como el trabajo que debe de hacer este agente externo para conseguir confinar el gas de electrones en una esfera de radio R . Esta energía de degeneración es simplemente:

$$W = - \int_{\infty}^R dr P_0(r) 4\pi r^2.$$

Un **cambio adiabático** dV en el volumen de la estrella dará por tanto lugar a un **cambio en su energía de degeneración** igual a

$$dW = -P_0(n)dV = -P_0(R) 4\pi R^2 dR.$$

- Por otra parte, ese mismo cambio adiabático dV en el volumen de la estrella dará lugar a una **cambio en su energía potencial gravitatoria**

$$dE_g = \left(\frac{dE_g}{dR} \right) dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR,$$

donde M es la masa total del gas (electrones + nucleones), G es la constante de gravitación universal, y α es un parámetro de orden unidad que depende de la estructura espacial de la densidad en la estrella¹.

- Si la estrella está **en equilibrio**, el **cambio total de energía** $dW + dE_g$ **al variar infinitesimalmente el volumen debería ser cero**. Por tanto:

$$P_0(R) = \frac{\alpha G M^2}{4\pi R^4},$$

Usando esta expresión de equilibrio, y escribiendo explícitamente $P_0 = P_0(R)$, podremos eliminar la presión y obtener una **relación entre masas y radios para enanas blancas**. Veamos distintos **casos límite**:

- **Gas clásico** ($T \gg T_F \simeq 10^{10}\text{K}$): el sistema puede aproximarse por un gas de Boltzmann, esto es, $P_0 = nk_B T$, y se sigue que

$$R = \frac{2}{3} \alpha M \frac{G m_p}{k_B T},$$

* $\alpha = 3/5$ si suponemos que la densidad es constante en el interior de la estrella. Chandrasekar encontró $2/3$ usando otra distribución más realista.

donde hemos usado el hecho que $M \simeq 2Nm_p$, y

$$n = \frac{N}{V} = \frac{M/2m_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{8\pi m_p R^3}.$$

Obviamente, **este caso no es aplicable a las estrellas enanas blancas** donde $T \sim 10^7$ K. Sin embargo, **sí es aplicable al estudio de protoestrellas** donde predice correctamente el hecho de que **el radio va disminuyendo** mientras que la temperatura va aumentando y aumenta con la masa. Claramente este resultado deriva de que, en un gas ideal clásico, a más temperatura, más presión y por tanto es necesaria mayor fuerza global gravitatoria (i.e. menor radio) para equilibrar el sistema.

- o **Gas de fermiones no relativista ($T \gg T_F$)**: esto es, tenemos un gas ideal fuertemente degenerado de **electrones no relativistas** (recordemos que en este caso $x \ll 1$). En este caso $R \gg 10^8$ (que, observemos, está en contra de lo observado empíricamente para las enanas blancas) y $A(x) \simeq \frac{8}{5}x^5$, de donde

$$P_0 \simeq \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} \frac{8}{5} x^5 \propto n^{5/3} \propto \frac{M^{5/3}}{R^5}.$$

Usando esta expresión en la **condición de equilibrio** obtenemos:

$$R \simeq \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \frac{\hbar^2}{Gm m_p^{5/3} M^{1/3}} \propto M^{-1/3}$$

Este es el resultado obtenido por **Fowler**, que predice que **el radio de equilibrio va disminuyendo suavemente con la masa**: incluso una masa enorme se puede “condensar” en un radio finito. **Algo falla con este cálculo**, y es obviamente el hecho de que hemos asumido un radio demasiado grande, y por tanto densidades pequeñas, y así $x \ll 1$, en lugar de $x \gg 1$).

- **Gas de fermiones relativista** ($T \ll T_F$): en este caso sí son importantes los efectos relativistas. En particular $x \gg 1$, lo que implica $R \ll 10^8$ cm y $A(x) \simeq 2x^4 - 2x^2$, de donde se tiene:

$$R \simeq \frac{\sqrt[3]{9\pi}}{2} \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}} \propto M^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}},$$

con la constante (con dimensiones de masa)

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{m_p^2}.$$

A diferencia del caso anterior ahora aparece una **masa límite por encima de la cual no existe una solución (real) de equilibrio**.

- Como ya vimos, en el caso de las enanas blancas el gas de electrones es un gas de Fermi degenerado y relativista. Por tanto, concluimos que **no es posible tener una estrella enana blanca con $M > M_0$** .
- La masa M_0 es conocida como el **límite de Chandrasekhar**. Cálculos detallados del propio Chandrasekhar mostraron que $M_0 \simeq 1,44M_\odot$, con M_\odot la masa de nuestro sol.
- Para estrellas con masa $M > M_\odot$ la presión de degeneración P_0 consecuencia del principio de exclusión de Pauli **no es suficiente para contrarrestar el colapso gravitacional** y el sistema sigue contrayéndose generando nuevos fenómenos... como **estrellas de neutrones o agujeros negros**.
- Esta teoría es **totalmente compatible con la observación**: no existe evidencia empírica de estrellas enanas blancas con masa mayor que M_0 .

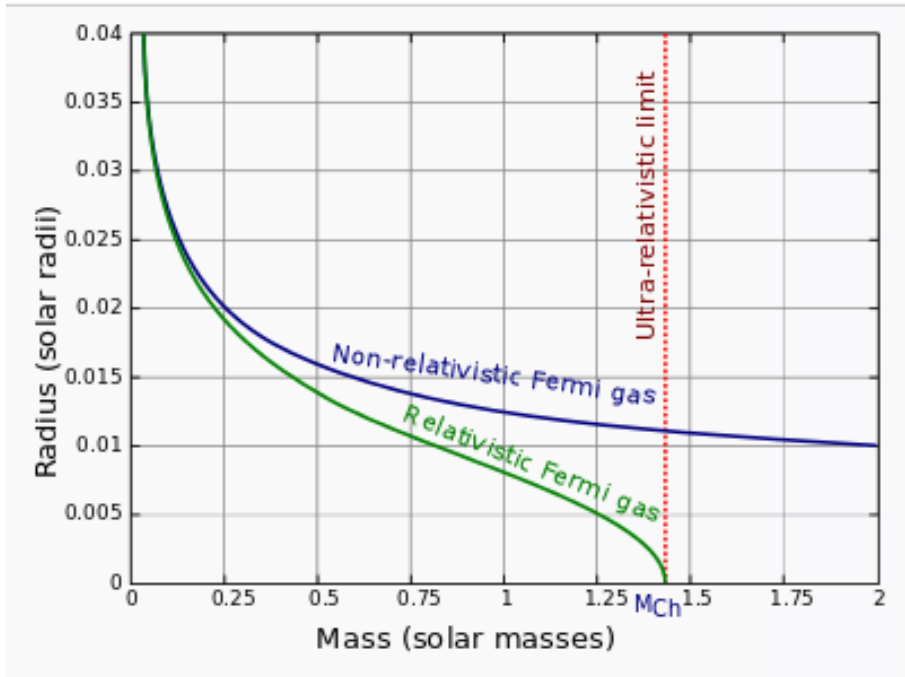
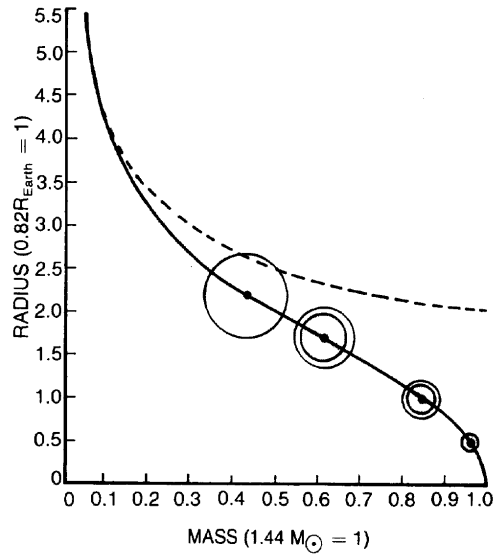


Figura 1. Masa versus radio. La curva discontinua se sigue de las consideraciones de degeneración no-relativista de Fowler: el radio para la configuración de equilibrio disminuye, pero sólo se hace cero para masa infinita. En este caso, una estrella de cualquier masa puede confortablemente equilibrarse en el estado estrella enana blanca. Esto no ocurre para configuraciones completamente degeneradas relativistas.

Elegante teoría! y Premio Nobel (1983) para Chandrasekhar –compartido con Fowler.



4. Gas electrónico en metales

- Los **metales** se caracterizan por **altas conductividades eléctrica σ y térmica κ** . Alrededor de 1890 quedó claro que la carga tenía naturaleza discreta y que altas σ en metales eran consecuencia de que los electrones exteriores en átomos estaban muy débilmente ligados.
- A este conjunto de electrones prácticamente libres se le llamó **gas electrónico**, y comenzaron a aplicarle los métodos de la Teoría Cinética y Mecánica Estadística. **Drude (1900-1902) y Lorentz (1904-1909)** trataron el **gas electrónico como un gas de Boltzmann**. Se consiguen así **descripciones cualitativamente correctas a veces, pero hay fallos importantes**.
- Una de las principales dificultades del modelo clásico ocurre con el **calor específico**. El suponer que los electrones se comportan como un gas ideal clásico que sigue la distribución de Maxwell-Boltzmann implica que los electrones han de satisfacer el **principio de equipartición**, esto es, cada electrón ha de contribuir $3 \times \frac{1}{2}k_B$ al calor específico, lo que implica su **independencia con la temperatura**.
- Las medidas muestran que **todos los sólidos tienden a presentar un calor específico independiente de la temperatura para temperaturas suficientemente alta** (es la **ley de Dulong y Petit**), pero:
 - El valor experimental es aproximadamente $3R$ por mol para sólidos monoatómicos, en lugar de la predicción $\frac{9}{2}R$ puesto que Maxwell-Boltzmann establece que

electrones:	3 grados libertad (gl)	\implies	$3 \times \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k$
red :	3 gl \times 2 térm. cuadrát.	\implies	$3 \times 2 \times \frac{k}{2} = 6k$

- Si la temperatura no es tan alta, C_V presenta una clara dependencia en T .

- Como veremos en detalle en un capítulo posterior (sobre sólidos) [Einstein y Debye notaron cómo los modos de vibración de la red tienen naturaleza bosónica](#) y contribuyen al [calor específico](#) con:

$$C_v = \frac{12\pi^4}{5} k \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad \theta_D = \text{temperatura de Debye} \quad (3)$$

- [Pero ¿y la contribución del gas electrónico?](#) Si sumamos a esto una contribución constante, como la que produciría un gas clásico, no se obtiene acuerdo con los datos para metales.

4.1. Modelo de Sommerfeld

- [Sommerfeld \(1928\)](#) notó que era muy importante [tratar el gas electrónico como un gas de Fermi degenerado](#).
- En efecto, tomando una degeneración $g = 2$, ya vimos que la [energía de Fermi](#) del gas de electrones se puede escribir como

$$\epsilon_F^{\text{electr}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m},$$

donde $n = N/V = n_e n_a / a^3$ ($n_e = \#$ electrones de conducción por átomo; $n_a = \#$ átomos por celda unidad; $a =$ espaciado de la red cristalina del metal).

- Si usamos los valores para el [átomo de Na](#), por ejemplo: $n_e = 1$, $n_a = 2$, $a = 4,29 \text{ \AA}$, se sigue $n = 2,53 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, y haciendo m igual a 0.98 veces la masa del electrón para compensar los efectos de interacción coulombiana entre los electrones y así tratar a este gas como ideal, se tiene para la [energía de Fermi](#) en este caso

$$\epsilon_F \simeq 5,146 \times 10^{-12} \text{ erg} = 3,21 \text{ eV}$$

que se traduce en una [temperatura de Fermi](#)

$$T_F \equiv \epsilon_F / k_B \simeq 3,3 \times 10^4 \text{ K}$$

para el sodio.

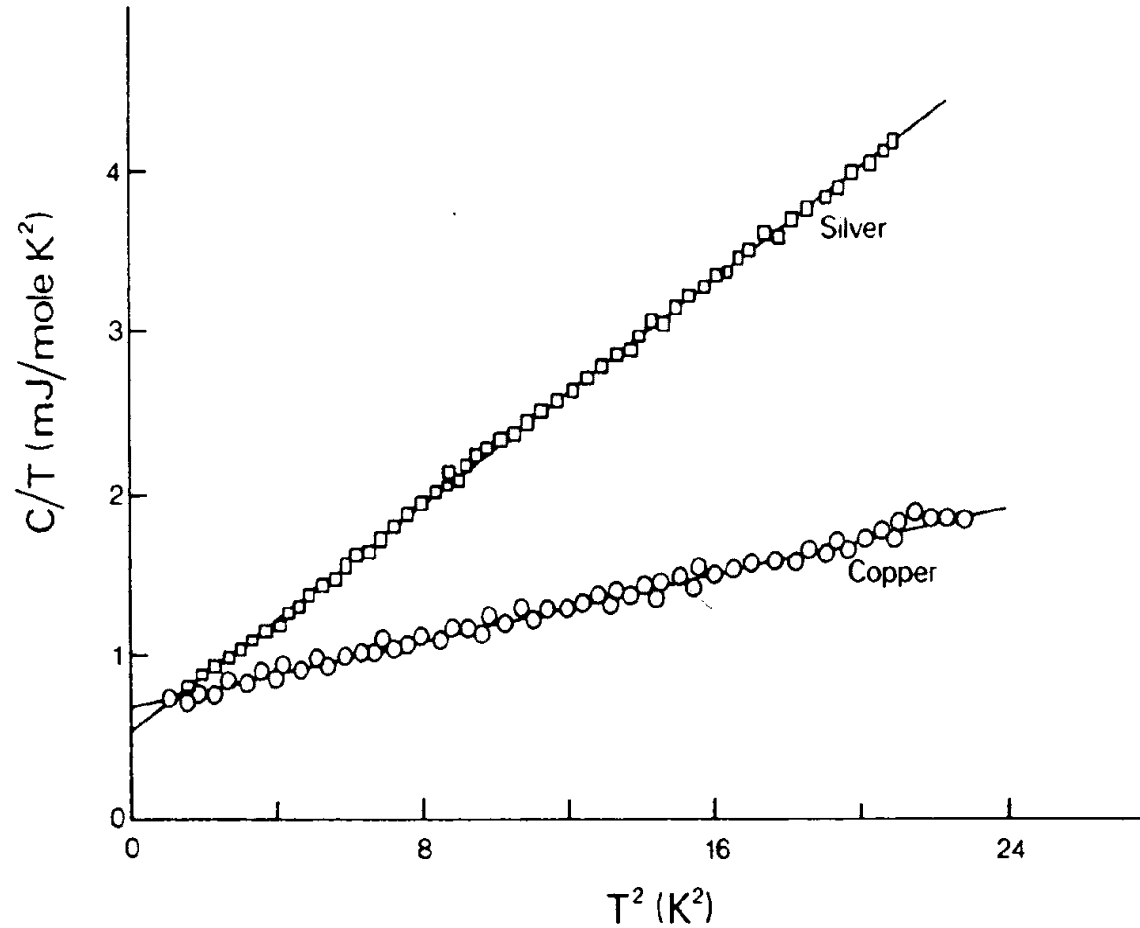
- Así, en general, todos los metales tienen una T_F en el rango $10^4 - 10^5$ K, que es mucho mayor que temperatura ambiente ($\simeq 3 \times 10^2$ K), luego el gas electrónico está, en efecto, completamente degenerado, y el número medio de ocupación correspondiente diferirá muy poco de la función paso para 0 K: sólo las esquinas estarán ligeramente redondeadas en una región del orden de $k_B T$, despreciable comparada con ϵ_F .
- Nótese también que el momento de Fermi p_F asociado a la energía de Fermi calculada arriba está muy por debajo del momento típico de un electrón relativista. Por tanto el gas de electrones en metales es un gas de Fermi no-relativista completamente degenerado.
- Podemos entonces aplicar en estas condiciones lo que ya obtuvimos para el calor específico del gas fermiónico no-relativista degenerado:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} k_B \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right). \quad (4)$$

- A temperaturas ordinarias, $(k_B T / \epsilon_F) \equiv T / T_F \sim \mathcal{O}(10^{-2})$, por lo que esta contribución es del orden de 10^{-2} R por mol, despreciable frente a la contribución de la red cristalina, 3R por mol. En consecuencia, los metales a temperaturas ordinarias han de presentar únicamente la contribución bosónica, lo que confirman los experimentos.
- La contribución bosónica decrece rápidamente con la temperatura, $\sim T^3$, reflejando cómo los osciladores van congelándose, de modo que, a bajas temperaturas, puede hacerse comparable a la fermiónica. En particular la predicción es:

$$C_V = \gamma T + \delta T^3$$

- Esta predicción **se confirma experimentalmente con gran precisión en metales y aleaciones**. En particular, si representamos C_V/T frente a T^2 , esperamos obtener rectas a bajas temperaturas cuya pendiente δ permite determinar θ_D (temperatura de Debye del metal), mientras que el corte γ con el eje vertical está relacionado con ϵ_F .



5. Rango de validez del gas ideal de fermiones

- Es importante resaltar que hasta ahora sólo hemos estudiado **modelos ideales**, i.e. sistema de partículas con estadística clásica o cuántica pero con la característica común de **no presentar interacciones entre sus elementos**. Esto ha sido así en el **gas clásico de Boltzmann** de capítulos anterior, y en el **gas fermiónico ideal**, tanto en el caso **débilmente degenerado** como **totalmente degenerado**, y lo veremos en el siguiente capítulo para el **gas ideal de bosones**.
- Cabe entonces preguntarse por la **aplicabilidad de estos modelos y sus predicciones a los sistemas reales**, que sabemos presentan **interacciones no triviales** entre sus componentes.
- En particular, el **gas ideal clásico de Boltzmann** es un ejemplo paradigmático de los métodos de la mecánica estadística. Además, describe con bastante precisión la **física colectiva de muchos gases reales** (donde la baja densidad hace buena la aproximación de no-interacción). Sin embargo, nadie espera que el gas ideal clásico capture la física de los **sólidos o los líquidos**, donde la **interacción es el factor dominante**.
- De manera sorprendente, **la aproximación ideal (i.e. no-interacción) en sistemas cuánticos con muchos grados de libertad resulta ser mucho más poderosa y predictiva**, aunque las razones son bastante sutiles.
- En el caso de **bosones** (próximo capítulo), la aproximación no interactuante es bastante precisa en tres casos importantes: **fotones, fonones y gas de Bose diluido**. Así, en el próximo tema estudiaremos dos problemas fundamentales que implican la no interacción bosones: **radiación de cuerpo negro y condensación de Bose**. Además, el comportamiento de los **superconductores y superfluidos** comparte algunas características comunes con la del gas de Bose.
- Para los fermiones, es de esperar a priori que la aproximación ideal raramente sea útil:

- Los **electrones** están cargados y la repulsión electromagnética entre electrones en un átomo, molécula, o material contribuye de manera importante a su energía.
 - Los **neutrones** interactúan a través de la interacción fuerte, así que los núcleos y las estrellas de neutrones también son pobres candidatos para una teoría sin interacción.
 - Los **neutrinos** son *difíciles de meter* en una caja (e.g. para que una pared de plomo parara la mitad de neutrinos que le llegan debería tener un grosor de varios años luz ...).
 - Hoy en día hay experimentos con **gases fríos y diluidos de átomos fermiónicos**, pero el modelo de fermiones sin interacción no parecería en principio tener muchas aplicaciones interesantes en este campo.
- Sin embargo, resulta sorprendente comprobar que **el gas ideal de Fermi describe de manera notable todos estos sistemas** (átomos, metales, aislantes, núcleos y estrellas de neutrones). En muchos casos, los sistemas fermiónicos con interacción se comportan aproximadamente como una **colección de fermiones sin interacción en presencia de un potencial modificado**.
 - La aproximación es tan poderosa que **en la mayoría de las circunstancias podemos ignorar las interacciones**; cada vez que hablamos de excitar un electrón $1S$ en un átomo de oxígeno, o un par electrón-hueco en un semiconductor, estamos usando esta aproximación efectiva de electrones no interactuantes. La **explicación** de este hecho sorprendente se basa en la **teoría de líquidos de Fermi**, de **Lev Landau**.
 - La **idea central de Landau** consistía en describir un sistema de fermiones en interacción a temperaturas bajas ($k_B T \ll \epsilon_F$) partiendo de un gas *ideal* de Fermi y **encendiendo lentamente la interacción**. Los estados excitados del gas ideal de Fermi se corresponden con electrones que saltan a estados por encima de la energía de Fermi y dejan huecos por debajo. Los **pares electrón-hueco** perturban el gas de electrones restante debido a la interacción, creando una **nube de apantallamiento** que convierte a estas excitaciones desnudas en **quasipartículas**, cuya estadística se puede entender bien usando el gas fermiónico ideal.