Introducción a la ~~Física~~ Estadística

Física Estadística
3º Física, UGR

Febrero 2017

Índice

Conjuntos

- El *espacio muestral* S es el que contiene todos los resultados de un experimento aleatorio. Los *eventos* (A, B) son subconjuntos del espacio muestral, S.

1. $A \cup B$, "A o B". Se denomina unión.
2. $A \cap B$, "A y B". Se denomina intersección.
3. A', "no A". Se denomina complemento o negación de A.

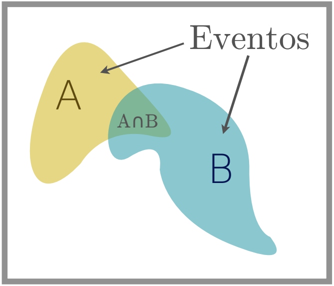


Figura: Conjuntos

Definiciones

Definición

Clásica: Si un evento puede ocurrir de h maneras diferentes de un número total de n maneras posibles, todos ellos son igualmente posibles. Entonces, la probabilidad del evento es $\frac{h}{n}$.

Definición

Frecuentista: Si después de n repeticiones de un experimento, donde n es muy grande, se observa que un evento ocurre h veces, entonces la probabilidad de dicho evento es $\frac{h}{n}$. Esto también se denomina la *probabilidad empírica* de un evento.

Axiomas de Kolmogórov

Axioma

La probabilidad S es no negativa y menor o igual que 1.

$$0 \leq p(S) \leq 1$$

Axioma

La probabilidad del evento seguro, S, es igual a 1, denotado simbólicamente,

$$P(S) = 1$$

Axioma

Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes (incompatibles dos a dos), entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum P(A_i)$$

Teoremas

Teorema

Para todo evento A,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Teorema

El evento imposible tiene probabilidad cero, $P(\oslash) = 0$.

Teorema

Si A' es el complemento de A, entonces $P(A') = 1 - P(A)$

Teorema

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Probabilidad condicionada

Consideremos $P(A|B)$, la probabilidad de que ocurra un evento A, sabiendo que también sucede otro evento B. La probabilidad condicional se escribe $P(A|B)$, y se lee "la probabilidad de A dado B".

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Eventos independientes

Si $P(A|B) = P(A)$, es decir, que la probabilidad de que ocurra A no depende de la ocurrencia o no de B, entonces decimos que A y B son eventos independientes. Esto equivale a:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Combinatoria

- Estudia la enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones que satisfacen ciertas condiciones establecidas.

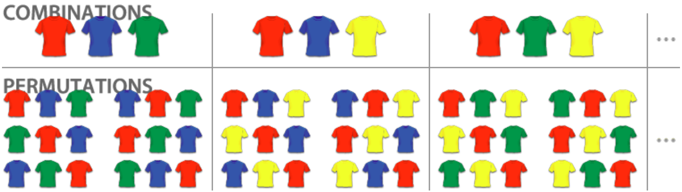


Figura: Combinaciones y permutaciones

Permutaciones

- Variación del orden o la disposición de los elementos
- Si tenemos n objetos diferentes, ¿cómo los ordenamos en línea?

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

- ¿Y si quisiéramos ordenar solo k de estos objetos?

Sin repetición	Con repetición
$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Combinaciones

- En muchas situaciones solo nos interesa la selección de los objetos sin tener en cuenta su orden.
- ¿Cómo escogemos k elementos de un conjunto con n elementos[1]?

$$\binom{n}{k} = C_{(n,k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

[1] Sin repetición, en el caso con repetición vendría dado por $\binom{n+k-1}{k}$.

Permutación y combinación I

¿En una clase de 10 personas van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si (a) los premios son iguales y (b) los premios son diferentes.

Supuesto 1: Una persona NO puede recibir más de un premio, NO se pueden repetir.

1. Los premios son diferentes (no es lo mismo ganar el primer premio que el segundo) importa el orden. Es una permutación y hay $\frac{10!}{(10-3)!} = 720$ maneras.
2. Los premios son iguales, no importa el orden, son indistinguibles. Es una combinación y hay $\left(\begin{array}{c} 10 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$ maneras.

Permutación y combinación II

Supuesto 2: Una persona puede recibir más de un premio, se pueden repetir,

1. Los premios son diferentes (no es lo mismo ganar el primer premio que el segundo), así que importa el orden. Es una permutación y hay $n^k = 10^3$ maneras.
2. Los premios son iguales, no importa el orden, son indistinguibles. Es una combinación y hay, $\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 12 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$ maneras.

Aproximación de Stirling

- Cuando n es grande, no es práctica la evaluación directa de $n!$. En tal caso se pueden emplear las siguientes fórmulas de aproximación,

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

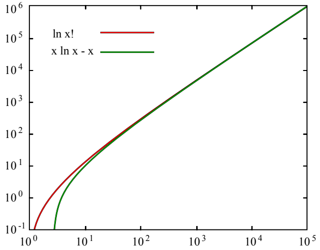


Figura: Aproximación Stirling

Distribución de probabilidad

- Supongamos que a cada punto del espacio muestral le asignamos un número. Tenemos entonces una función definida en el espacio muestral.
- Esta función es una variable estocástica (X).
- Variables discretas y continuas.

Distribuciones discretas

Sea X una variable aleatoria discreta, con valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a los que se asocia una probabilidad $f(x_k)$,

$$P(X = x_k) = f(x_k) \qquad k = 1, 2, \ldots$$

donde $f(x)$se define como la *función o distribución de probabilidad.*

Propiedades

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_k f(x_k) = 1$

Función de distribución

La *función de distribución acumulada o función de distribución para* X está definida por,

$$F(x) = P(X \leq x), \ x \in (-\infty, \infty)$$

Propiedades

1. $F(x)$ es creciente
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ es continua desde la derecha. Es decir $\lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x) \; \forall x$

Distribuciones continuas

- Se define $f(x)$ como la *función de densidad de probabilidad*,

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

Propiedades

1. $f(x) \geq 0 \ \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $\int_{-\infty}^{x} f(u)\, du = F(x)$
4. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$

Medidas de centralidad

1. Moda: Valor más probable ($f'(x) = 0$)
2. Mediana: Valor que acumula el 50 % de la probabilidad
3. Media

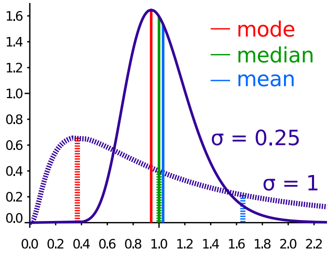


Figura: Medidas de centralidad

Cambio de variables

Distribuciones continuas

Una variable

$$g\left(u\right)=f\left(x\right)\left|\frac{dx}{du}\right|=f\left[\psi\left(u\right)\right]\left|\psi'\left(u\right)\right|$$

$$g\left(u,v\right)=f\left(x,y\right)\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|=f\left[\psi_1\left(u,v\right)\psi_2\left(u,v\right)\right]\left|J\right|$$

donde,

$$J=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{array}\right|$$

Momentos de una distribución

- Una vez definidas las distribuciones de probabilidad, debemos caracterizarlas.

Sea $k \in \mathbb{N}$, el momento de orden k es $E\left[X^k\right]$, y se calcula como,

$$\left\langle x^k \right\rangle = \sum_i x_i^k P\left(X = x_i\right)$$

para el caso y discreto y,

$$\left\langle x^k \right\rangle = \int x^k f\left(x\right) dx$$

para el caso continuo.

Momentos de una distribución

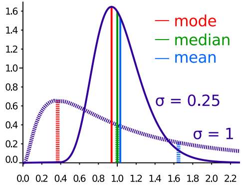


Figura: Media

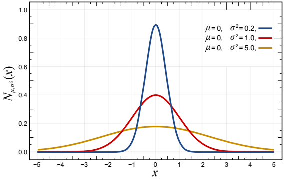


Figura: Varianza

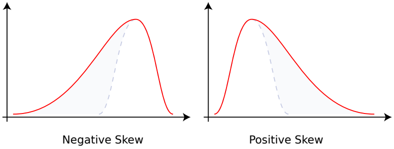


Figura: Sesgo

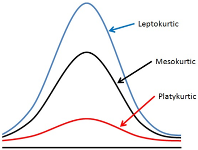


Figura: Kurtosis

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos es,

$$M_X(t) := \mathbb{E}\left(e^{tX}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

Discreto

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

Continuo

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Permite generar los momentos,

$$\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n M_X}{dt^n}\right|_{t=0}$$

Función generadora de cumulantes

La función generadora de cumulantes se define como[2],

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx$$

Si los momentos existen,

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$$

Se definen los cumulantes (κ_n) como,

$$H(t) = \log \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{(it)^n}{n!} = \mu\, it - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \cdots$$

- En física estadística, la función de partición canónica es $Z(\beta) = \left\langle e^{-\beta E} \right\rangle$. La energía libre de Helmholtz, $F = -\frac{1}{\beta} \log Z$.

[2] En el caso discreto, $\varphi_X(t) = \sum e^{itx_i} P(X = x_i)$.

Distribución binomial

Imaginemos un experimento (lanzar repetidamente una moneda, o un dado). Sea p la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. La probabilidad de que ocurra un evento x veces en n pruebas (n éxitos y $n - x$ fracasos) es,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

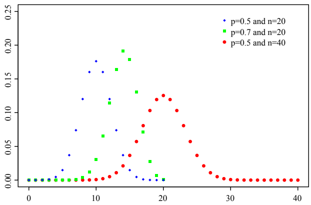


Figura: Función de distribución.

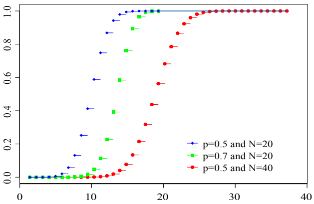


Figura: Función de distribución de probabilidad.

Distribución de Poisson

La función de probabilidad de X está dada por,

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

con $\lambda > 0$.

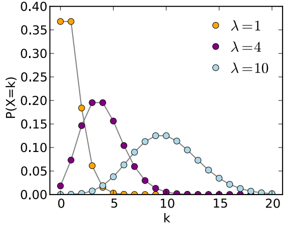


Figura: Función de distribución

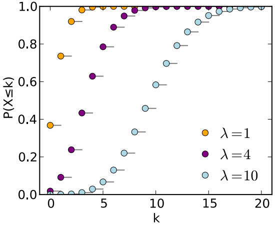


Figura: Función de distribución de probabilidad

Distribución normal (o gaussiana)

La función de densidad para esta distribución está dada por,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

donde μ es la media y σ^2 la varianza.

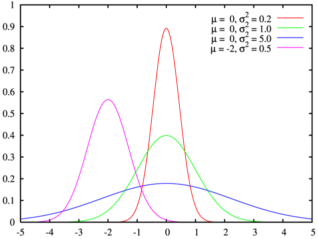


Figura: Función de distribución.

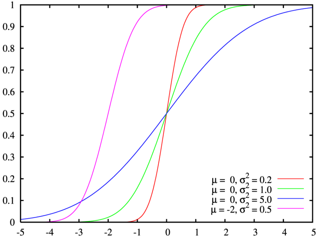


Figura: Función de distribución de probabilidad.

Ley de los grandes números

Sea $X_1, X_2, X_3, \ldots$ es una sucesión infinita de variables aleatorias independientes que tienen el mismo valor esperado $\mu < \infty$, entonces el promedio,

$$\overline{X}_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n)}{n}$$

converge en probabilidad a μ. En otras palabras,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

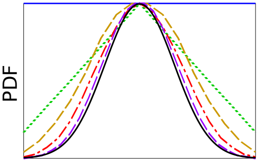
Teorema del límite central

Teorema

Sea $S_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ *y supongamos que* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *es una secuencia de variables estocásticas independientes e idénticas con media* μ *y varianza* $\sigma^2 < \infty$*. Cuando se cumpla la condición* $n \to \infty$*, la variable estocástica* $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ *converge a una distribución normal* $N\left(0, \sigma^2\right)$*:*

$$\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \mu\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\right).$$

Teorema del límite central



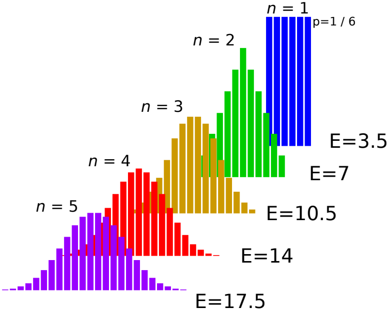


Figura: Suma de N dados

Teorema del límite central I

Demostración

Sea $\{X_1,\ldots,X_n\}$ variables estocásticas idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2. La suma $X_1+\ldots+X_n$ tiene media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.
Sea la variable,

$$Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}Y_i,$$

con media $\mu=0$ y varianza unidad $\sigma^2=1$.

Teorema del límite central II

Demostración

La función característica de Y_n viene dada por,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{Z_n} = \varphi_{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} Y_i}(t) = E\left[e^{it\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} Y_i}\right] = \\
\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdot \varphi_{Y_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdots \varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n
\end{aligned}
$$

Teorema del límite central III

Demostración

Por último, desarrollando en series de Taylor,

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = E\left[e^{t\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}\right] =$$

$$\cancelto{1}{E(1)} + i\frac{t}{\sqrt{n}}\cancelto{0}{E\left[Y_1\right]} - \frac{t^2}{2n}\cancelto{1}{E\left[Y_1^2\right]} - \frac{i}{6}\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}}E\left[Y_1^3\right] + o\left(\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \quad t \to 0$$

Teorema del límite central IV

Demostración

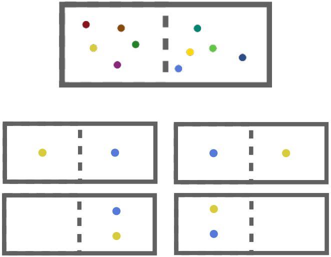
Tomando el límite de la función exponencial, $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, y tomando el desarrollo en serie hasta orden n (cierto en la medida en que $n \to \infty$), tendremos,

$$\varphi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n}$$

Esto no es otra cosa que la función característica de una distribución normal $N(0,1)$.

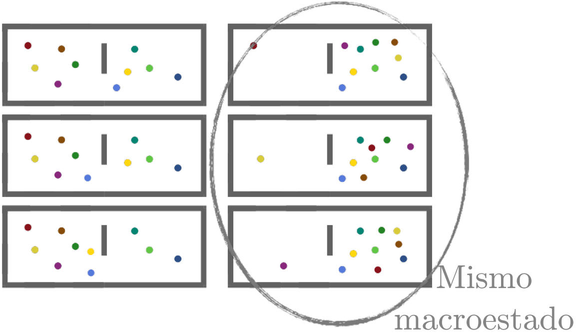
¿Cómo se distribuyen N partículas en una caja? I

Distribución de N partículas en una caja con una pared porosa

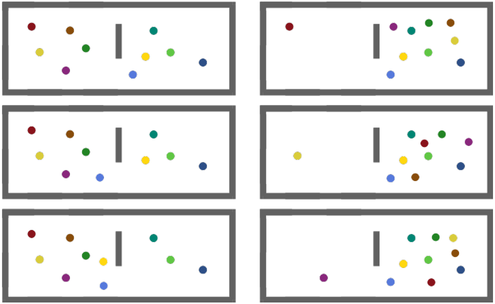


- Hay 2^N microestados distintos.

¿Cómo se distribuyen N partículas en una caja? II



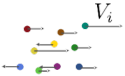
¿Cómo se distribuyen N partículas en una caja? III



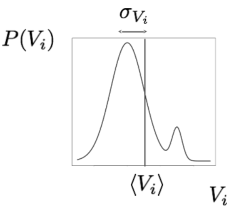
$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!\,2^N}$$

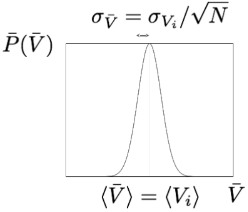
¿Cómo se distribuyen N partículas en una caja? IV

¿Cómo es la distribución de velocidades?



$$\bar{V} = \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_N}{N}$$





- Teorema del límite central

¿Cómo se distribuyen N partículas en una caja? V

¿Cómo es la distribución de velocidades?

- Distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_{\mathbf{v}}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right]$$

- Gaussiana para las componentes de la velocidad