



Esteban Moro

En esta contribución, Miguel Angel Muñoz y colaboradores nos introducen en el problema del diseño de redes (grafos) que son óptimas para la función para que se las diseña. En particular, para la maximización de la sincronización de la dinámica de los nodos o para la minimización del tiempo de un caminante aleatorio a cualquier punto de la red, por ejemplo. El problema de encontrar dichas redes es computacionalmente complejo (NP-difícil) y, aunque se conocen algunas soluciones explícitas para un número de nodos bajo, los autores recurren a un algoritmo basado en "simulación de templado" para obtener dichas soluciones. El resultado son las llamadas "redes enmarañadas", en las que se favorece una estructura homogénea carente de nodos centrales. Sin embargo, las redes enmarañadas no son escalables, razón por la cual es difícil encontrarlas en la naturaleza donde los simples mecanismos evolutivos o dinámicos de crecimiento de redes predominan frente a las grandes reestructuraciones topológicas necesarias para llegar a una estructura de red enmarañada. Aun así, algunas ecosistemas se organizan con este tipo de arquitectura enmarañada, lo que puede ser un indicio de otro tipo de dinámica o evolución de los mismos.

Redes Óptimas: Grafos de Ramanujan, jaulas y redes enmarañadas

Miguel A. Muñoz (con Luca Donetti y Pablo Hurtado)

Redes óptimas

Imagine el lector que se le encomienda diseñar una red. Pensemos, por ejemplo, en una red de ordenadores conectados entre sí, o una red de estaciones eléctricas, una red de aeropuertos y líneas aéreas conectándolos, una red neuronal artificial, o cualquier otro ejemplo similar [1]. Supongamos también que para hacerlo disponemos de un número dado de nodos (ordenadores, estaciones eléctricas, aeropuertos, neuronas,...) y de conexiones o enlaces entre ellos (cables de conexión, líneas aéreas, dendritas,...) y que se desea que la red resultante desempeñe de manera *óptima* la función para la que se diseña (tráfico eficiente y rápido de paquetes de información entre ordenadores, conexión rápida y robusta de flujo eléctrico, rapidez de conexión y pocos cambios de aeropuerto para viajar entre dos ciudades cualesquiera, o máxima capacidad de memoria de la red neuronal). ¿Cómo deberíamos conectar los nodos entre sí usando los enlaces disponibles para resolver de forma óptima estos problemas?.

Para ser un poco más específicos, vamos a discutir un problema particular de esta tipo: el diseño de redes, por ejemplo, neuronales, de modo que posean propiedades de *sincronización* óptimas. Una red de neuronas viene especificada tanto por la topología con que se unen sus nodos y enlaces como por el conjunto de osciladores (neuronas) ubicadas en cada uno de los nodos de la red que evolucionan siguiendo una cierta dinámica. Para conseguir que la red neuronal pueda actuar como un todo es necesario que las neuronas individuales puedan sincronizar sus estados individuales y así se pueda alcanzar un estado coherente o sincronizado de toda la red [2]. Puesto que la dinámica de cada neurona depende de todas las neuronas vecinas conectadas con ella, la topología de la red condicionará fuertemente las propiedades dinámicas globales en general y la sincronizabilidad en particular. La red de células del miocardio es otro ejemplo

bien conocido donde se requiere una respuesta sincronizada para conseguir un buen funcionamiento, mientras que la desincronización (fibrilación) lleva a comportamientos anómalos o patológicos.

El problema de la sincronización en redes de osciladores ha generado un enorme interés en los últimos años y se han publicado decenas de artículos para aclarar cuales son las topologías ideales para conseguir sincronización de la forma más eficiente y robusta posible. Es obvio, por ejemplo, que la red óptima a tal efecto debe necesariamente ser conexa, ya que si no lo es no hay modo de comunicar las partes disjuntas que por tanto son no-sincronizables. ¿Pero cómo debe ser dispuesta la maraña de conexiones entre nodos para maximizar la sincronizabilidad? [2].

Para finalizar, otro problema relacionado con el de la sincronización es el del diseño de redes tales que un caminante moviéndose aleatoriamente de un nodo a otro a través de los enlaces pueda alcanzar en un tiempo mínimo (óptimo) cualquier punto de la red. Esta situación abstracta es de relevancia concreta al crear redes de ordenadores o en muchos otros problemas de ciencia computacional en los que paquetes de información viajan por la red.

En este artículo ilustraremos cómo, en muchos problemas de optimización del estilo de los que acabamos de exponer, la solución al problema viene dada por redes con topologías muy similares entre sí, que comparten rasgos genéricos. Obviamente, para cada número de nodos y cada número de enlaces entre ellos, la solución óptima será distinta, pero en cualquier caso la arquitectura resultante sigue unos mismos principios universales, como vamos a tratar de ilustrar.

Por simplicidad en la presentación, en lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a redes "sin pesos", esto es, redes en las que todos los enlaces son simétricos y tienen la misma importancia o peso relativo. Nótese que esta restricción no tiene por qué darse en redes reales, donde puede

haber, por poner un ejemplo, líneas aéreas con mucho mayor tráfico aéreo que otras, o estaciones eléctricas conectadas asimétricamente. En cualquier caso, todos los conceptos discutidos en lo que sigue son fácilmente extensibles a redes asimétricas o con pesos; los resultados en dichos casos pueden ser distintos de los obtenidos aquí [2].

Como veremos, en unos pocos casos particulares es posible encontrar un solución matemática precisa utilizando elementos avanzados de teoría de grupos y otras técnicas que no discutiremos aquí. Ilustraremos que, en general, el uso del ordenador permite generar explícitamente soluciones óptimas, o muy cercanas a la óptima, mediante el uso de técnicas sencillas de "simulated annealing" ("simulación de templado"). Finalmente, analizaremos la arquitectura de las topologías óptimas y discutiremos su relevancia tanto en la Naturaleza como en redes artificiales.

Un poco de teoría espectral de redes

Para poder tratar los problemas planteados de manera sistemática necesitamos introducir un formalismo matemático, que será el de la **matriz Laplaciana**. Consideremos una red con N nodos, L enlaces y sin autobucles (no hay enlaces conectando un nodo consigo mismo). La matriz Laplaciana vale -1 en las posiciones (i,j) tales que los nodos i y j están conectados, 0 en el caso contrario, mientras que, para $i = j$, esto es, en la diagonal principal, el valor del elemento de matriz viene dado por la conectividad, k_i , o número de enlaces de conectan el nodo i con los restantes. Esta matriz es simétrica (por serlo las conexiones que estamos considerando) y contiene toda la información sobre la topología de la red. Se pueden definir otras matrices análogas, como la matriz de adyacencia o la matriz Laplaciana normalizada, pero aquí no las discutiremos.

Cualquiera que esté familiarizado con conceptos básicos de álgebra lineal podría tener la idea de diagonalizar la matriz, y analizar el significado de los N autovalores, λ_i , y sus correspondientes autovectores. La matriz Laplaciana y el análisis de sus componentes es la base de la *teoría espectral de grafos*, que constituye la fundamentación matemática de cuanto diremos aquí [3].

En primer lugar, es fácil convencerse de que, dado que todas las líneas y todas las columnas suman cero, $\lambda_1 = 0$ es siempre un autovalor y su autovector asociado es trivial $(1,1,\dots,1)$. De hecho, es sencillo demostrar que λ_1 es el autovalor más bajo y que, ordenando los autovalores (todos ellos reales por ser la matriz simétrica) de menor a mayor, se puede escribir:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$$

El primer autovalor no trivial que corresponde al primer "modo de vibración" no trivial, λ_2 , al que se suele llamar *salto espectral*, es el que controla muchas de las propiedades topológicas más evidentes de la red.

Un ejemplo sencillo ilustra las propiedades topológicas codificadas en λ_2 (los lectores que prefieran eludir los desarrollos algebraicos que siguen, pueden saltar directamente al último párrafo de esta sección).

Consideremos una red con dos comunidades de nodos altamente conectados dentro de cada una de las comunida-

des, pero pobremente conectadas entre sí. En casos como éste, en los que "cortando" relativamente pocos enlaces se puede separar la red en dos partes disjuntas, vamos a mostrar que λ_2 es pequeño, y su autovector asociado tiene componentes casi constantes en cada una de las dos comunidades. En efecto, nótese que, si las dos comunidades fuesen perfectamente disjuntas, el autovalor cero sería dos veces degenerado pues es el autovalor trivial para cada una de las dos submatrices y, por continuidad, si éstas son cuasi-disjuntas, λ_2 tiene que ser necesariamente próximo a cero. Como el autovector asociado debe ser ortogonal al $(1,1,\dots,1)$, éste toma valores positivos en uno de los dos subgrafos y negativos en el otro, de modo que su suma sea cero. De hecho, ésta es la base teórica de uno de los métodos más utilizados para biseccionar redes. Por el contrario, redes con salto espectral grande ($\lambda_2 \gg 0$) son redes intrincadas en las que no resulta sencillo separar dos componentes cortando pocos enlaces. Redes con alto salto espectral se denominan también buenos "expansores", en el sentido de que cualquier subdivisión del grafo en dos subgrafos tiene muchos enlaces entre ambas, o lo que es lo mismo, cualquier sub-grafo "se expande" por todo el grafo.

En una serie de artículos pioneros, Pecora y colaboradores [2] demostraron analíticamente (mediante un sencillo cálculo de linealización) que una red es más fácilmente sincronizable (en el sentido de que el estado sincronizado es más robusto) cuanto más grande es el λ_2 asociado (no discutimos aquí otras dependencias más débiles). Por lo tanto, el problema de la sincronizabilidad máxima puede ser traducido en el de diseñar redes con el mayor salto espectral posible.

Por otra parte, estudiando el problema de caminantes aleatorios que se mueven saltando entre los nodos conectados entre sí en una red (que, como se dijo en la introducción, es un modelo elemental del problema del transporte aleatorio en redes) se puede llegar a la conclusión de que el tiempo medio de tránsito entre dos nodos cualesquiera está dominado también por λ_2 ; a mayor salto espectral menor tiempo de tránsito medio. Por tanto, los caminantes aleatorios se mueven y diseminan de forma más rápida y eficaz en redes con alto salto espectral.

En conclusión (y a modo de resumen de este apartado), los problemas de optimización que describimos en la introducción se pueden traducir al problema genérico de encontrar redes con salto espectral, λ_2 , tan alto como sea posible.

Solución exacta: el reto matemático

El problema de hallar redes (o familias de redes) con salto espectral máximo ha sido foco de numerosos estudios matemáticos, que no es nuestra intención revisar aquí. A título de curiosidad queremos mencionar que las herramientas matemáticas requeridas son complejas, y que parte de ellas tienen su origen en los trabajos del genial matemático hindú Srinivasa Ramanujan (figura 1) a principios del siglo XX. En la mayoría de los estudios matemáticos, en lugar de focalizarse en el problema de optimización para valores dados de N y L , se estudian *familias* de soluciones, para valores crecientes de N , y se impone que conforme N tiende a infini-

to, la familia converge a la solución óptima (que en el límite infinito es explícitamente calculable).



Figura 1. Sello de correos indio con la imagen de S. Ramanujan. Véase <http://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan>.

La solución al problema son lo que se denomina grafos o redes de **Ramanujan**. En general, son muy limitados los ejemplos en los que se pueden obtener redes de Ramanujan explícitamente para tamaños de red dados. En la figura 2, mostramos dos redes de Ramanujan construidas explícitamente usando técnicas desarrolladas recientemente por Lubotzky, Margulis y otros [3, 4] para $N = 24$ y $L = 36$ lo que corresponde a una conectividad media por nodo de $2L/N = 3$ y para $N = 120$ y $L = 240$ (conectividad media, 4). Nótese el aspecto altamente entrelazado y homogéneo de ambas redes; todos los nodos tienen la misma conectividad (3 y 4 respectivamente) y en gran medida son indistinguibles entre sí: todas las propiedades topológicas que se pueden medir desde un nodo coinciden para todos los nodos.

Desafortunadamente, para valores arbitrarios de número de nodos y enlaces no se sabe como construir grafos análogos. Otro inconveniente de este tipo de construcciones matemáticas es que se tiene garantizado que en el límite en que N se aproxima a infinito convergen a la solución óptima, pero para cualquier N finito no está garantizado que no existan otras redes con un salto espectral mayor. Por tanto, nuevas estrategias son necesarias para abordar el problema de optimización de redes finitas.

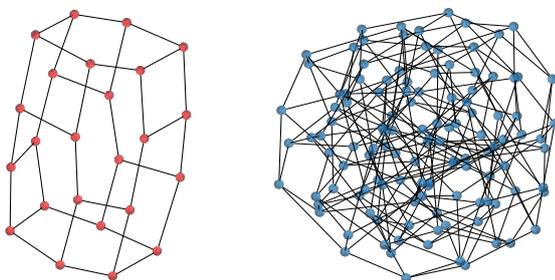


Figura 2. Grafos de Ramanujan con $N = 24$, $L = 36$ y $N = 120$, $L = 240$, respectivamente.

Solución numérica: el reto computacional

En una serie de trabajos recientes, hemos desarrollado una estrategia sencilla que nos permite obtener redes óptimas (o cercanas a la óptima) para cualesquiera valores del número de nodos y número de enlaces mediante el uso del

ordenador. La técnica computacional es conceptualmente simple y relativamente fácil de implementar.

Se toma como punto de partida, una red cualquiera con el número de nodos y enlaces que se desee y se construye a continuación su matriz Laplaciana. Ésta se diagonaliza usando alguno de los muchos y bien conocidos algoritmos que existen a tal efecto (como el de Lanczos) y se calculan sus autovalores (de hecho, basta con calcular λ_2).

A partir de este punto de partida implementamos un algoritmo de "simulated annealing" ("simulación de templado"). Este tipo de técnica computacional está inspirada en el proceso metalúrgico de templado (annealing) que permite obtener aleaciones de gran dureza y resistencia. En metalurgia, la idea es calentar y enfriar sucesivamente el material; enfriando se consigue relajar el sistema hacia un mínimo de energía, mientras que mediante el calentamiento se permite al sistema escapar de mínimos locales de energía para "explorar" nuevas regiones y finalmente localizar el mínimo absoluto para el que el material debe tener las mejores propiedades y ausencia de defectos.

En nuestro caso, el autovalor λ_2 (o, mejor dicho, su inversa) juega el papel de la energía, que debe ser optimizado. La "temperatura" se traduce en el simulated-annealing en la probabilidad de saltar entre dos configuraciones posibles del sistema. A mayor temperatura, mayor probabilidad de cambiar de estado.

Se procede del siguiente modo: se elige un enlace de la red inicial al azar y se sustituye por otro que conecte dos nodos elegidos también de modo aleatorio. La única restricción es que los dos nodos no estuviesen previamente conectados. Se calcula el salto espectral de la nueva matriz Laplaciana asociada a la red modificada, y se acepta el cambio con una cierta probabilidad que depende de un parámetro que llamamos temperatura, así como del incremento o decremento del salto espectral. Para temperaturas altas cualquier cambio es típicamente aceptado (casi) independientemente de la variación del salto espectral mientras que, conforme se reduce la temperatura, sólo cambios que resulten en un aumento del salto espectral son aceptados (algoritmo muy similar al de Metrópolis).

De este modo, disminuyendo progresivamente la temperatura e iterando el algoritmo, el sistema va aceptando con mayor probabilidad modificaciones de la red que aumenten el salto espectral y así converge progresivamente hacia una configuración con el máximo valor posible del salto espectral: la topología óptima.

Una vez implementado este algoritmo en el ordenador, hemos verificado extensivamente que, dados N y L , partiendo de distintas condiciones iniciales (esto es, redes iniciales con distintas topologías: aleatorias, redes de pequeño mundo, redes sin escala, etc) siempre se acaba convergiendo a redes óptimas muy similares o idénticas. En particular, si el número de nodos es relativamente pequeño (por debajo de 30, aproximadamente) se encuentra sistemáticamente una única solución óptima. Sin embargo, para redes mayores, en lugar de una solución única, se encuentra un conjunto o colectividad de soluciones con valores del salto espectral muy similares pero no idénticos. Es importante precisar que, en estos casos, el algoritmo puede quedar atrapado en configuraciones que no corresponden al verdadero valor

máximo del salto espectral, pero que son *máximos relativos*, estables respecto a los pequeños cambios de enlaces que emplea nuestro algoritmo, pero que no corresponden al máximo absoluto. Es por tanto necesario iterar el algoritmo partiendo de distintas condiciones iniciales y con distintos números aleatorios, para poder seleccionar de entre todos los resultados obtenidos el máximo absoluto. En cualquier caso, dado el altísimo número de configuraciones posibles para grandes N , es prácticamente imposible explorarlas todas y garantizar que se ha encontrado la solución óptima (es lo que en Teoría de Complejidad Computacional se llama un problema NP-difícil). Si se desea tener más confianza en los resultados obtenidos para N grandes, es necesario ejecutar las simulaciones durante tiempos cada vez mayores y con mayor número de realizaciones pero, en cualquier caso, el algoritmo conduce a excelentes resultados.

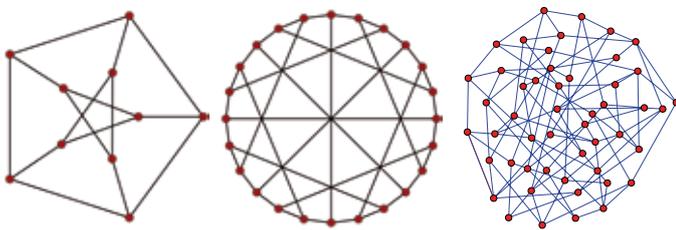


Figura 3. Redes enmarañadas con $N = 10$ ($L = 15$), $N = 24$ ($L = 36$) y $N = 50$ ($L = 100$) respectivamente. El primero coincide con el grafo jaula (3,5) o grafo de Petersen. El central coincide con el grafo jaula (3,7) o grafo de McGee.

¿Qué aspecto tienen las redes óptimas?

En la figura 3 mostramos algunas de las redes óptimas que emergen del proceso de optimización para $N = 10$, $N = 24$ y $N = 50$, con una conectividad promedio 3 en los dos primeros casos y 4 en el último. Nótese que el grafo obtenido para $N = 24$ y $L = 36$ tiene un salto espectral mayor que el grafo de Ramanujan mostrado en la figura 2 para los mismos parámetros, con lo que el método computacional da mejores resultados que los métodos analíticos (que generan excelentes resultados sólo para valores de N suficientemente grandes; óptimos sólo en el límite $N \rightarrow \infty$).

Curiosamente, las redes óptimas con $N=10$ y $N=24$ son bien conocidas en teoría de grafos. Ambas son lo que se denomina **grafos jaula** ("cage graphs") [5]. Un grafo jaula (k,g) es el grafo más pequeño posible en el que todos los nodos tienen la misma conectividad k (grafo regular) y en el que el bucle más corto tiene longitud g . Así, el grafo de Petersen no es otra cosa que el grafo jaula (3,5) y el de McGee es un jaula (3,7). Siguiendo con la exploración de esta correspondencia, encontramos que el jaula (3,6), denominado grafo de Heawood en la literatura matemática, coincide con el resultado de nuestra optimización para $N = 14$ (no mostrado). Para tamaños como $N = 12$ ó 16 no existe ningún grafo jaula, mientras que nuestra optimización genera los grafos mostrados en la figura 4, que son una especie de interpolación entre distintos grafos jaula. El paralelismo con los grafos jaula es una indicación de que en el proceso de optimización se tiende a eliminar bucles cortos, para evitar "desperdiciar" enlaces en conexiones redundantes.

¿Qué propiedades topológicas tienen las redes óptimas? Mediante estudios exhaustivos se ha verificado que, en el proceso de optimización [4]:

- las redes se hacen lo más regulares que sea posible: todos los nodos tienden a tener la misma conectividad, siempre y cuando ello sea compatible con los valores fijados de N y L . En caso contrario (esto es, si $2L$ no es divisible entre N) aparecen leves heterogeneidades.
- el tamaño de los bucles aumenta progresivamente: los bucles cortos, como triángulos, son sistemáticamente eliminados.
- todas las propiedades topológicas medidas desde cada nodo, como la distancia media al resto de los nodos, centralidad, o cualquier otra, tienden a estar tan homogéneamente distribuidas como sea posible de modo que los nodos sean topológicamente indistinguibles o casi indistinguibles.

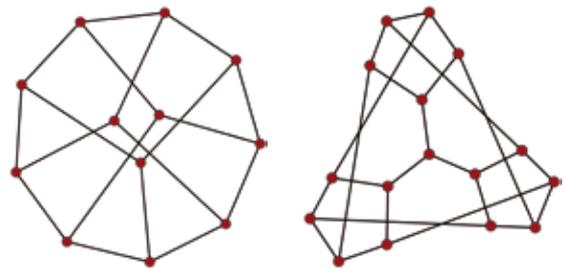


Figura 4. Redes enmarañadas con $N = 12$ ($L = 18$) y $N = 16$ ($L = 24$) respectivamente.

Así pues, las redes óptimas resultan ser redes extremadamente homogéneas y entrelazadas (hay que cortar muchos enlaces para separarlas en dos), en las que los nodos son (casi) indistinguibles, y en las que *no existen cuellos de botella que ralenticen el tráfico de información*. La solución óptima, que hemos denominado **redes enmarañadas** ("entangled networks") evita la existencia de nodos centrales por los que pase un mayor tráfico de caminos minimales que conecten dos nodos dados y, en cambio, favorece al máximo una estructura altamente democrática y descentralizada, en la que ningún nodo es más preponderante que los demás (no hay cuellos de botella). Nótese que son topologías altamente no triviales, con fuertes correlaciones y en absoluto sencillas de predecir a partir de N y L . Consecuencia de esto es el hecho de que aún no se dispone de métodos constructivos para diseñarlas explícitamente sin necesidad de recurrir a algoritmos computacionales.

¿Dónde se encuentran redes enmarañadas?

Un ejemplo de redes enmarañadas en la Naturaleza lo constituyen ciertas redes ecológicas de alimento o redes tróficas ("food webs") descritas recientemente [6] (véase por ejemplo las redes de Benguela, Coachela, Reef Small, etc). Los nodos de estas redes son las distintas especies de un ecosistema dado, y un enlace entre dos especies representa algún tipo de relación trófica entre ambas (alguien se come

a alguien). El aspecto de estas redes (no mostrado aquí) es enormemente parecido a las obtenidas en este artículo (por ejemplo, a la figura 3c). Sin embargo, no todas las redes tróficas son redes enmarañadas, aunque como se ha descrito en [6] éstas son las más robustas. La explicación es sencilla: si una especie se extingue por algún motivo, dado el carácter intrincado y enmarañado de la red, ésto hará que no se produzca una extinción en cadena, como podría fácilmente ocurrir si la red tuviese nodos privilegiados y otros nodos débilmente ligados al resto. La red enmarañada es la que más resistirá, sin provocar el colapso del ecosistema, en situaciones adversas en las que distintas especies desaparecen [7].

Donde las topologías enmarañadas juegan un papel muy importante es en el mundo de las redes *artificiales*, como es el caso de redes tecnológicas, de comunicación, o en aplicaciones en Ciencias de computación. Por ejemplo, estas topologías se utilizan para: construir redes eficientes sin congestión de tráfico o para optimizar el problema de búsqueda en redes [8], para diseñar códigos de corrección de errores, algoritmos de "desrandomización", o análisis de algoritmos en teoría de grupos computacional [3].

Sin embargo, contrariamente a lo que cabría pensar a priori, son pocas las redes (biológicas, sociales, ecológicas, etc.) con topología enmarañada óptima que aparecen en la Naturaleza. Por el contrario, redes altamente heterogéneas (como, por ejemplo, las redes libres de escala) aparecen con ubicuidad en decenas de ejemplos (desde internet, hasta redes sociales, redes semánticas, o redes de proteínas). ¿Cuál es la razón de ésto?. En la actualidad no disponemos de una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Lo que sí está claro es que, mientras que se conocen distintos *mecanismos evolutivos* para generar redes libres de escala (como el ya célebre "los ricos se hacen más ricos" de Barabási y Albert [1]), no conocemos ningún tipo de proceso dinámico o evolutivo que conduzca a redes enmarañadas. La Naturaleza parece no preocuparse por encontrar la solución óptima, sino que busca un compromiso entre "buenas propiedades" topológicas (salto espectral alto, aunque no máximo) junto con capacidad de adaptación y evolución, propiedades éstas de las que las redes enmarañadas parecen carecer. A modo de ilustración, nótese que si añadimos algún nuevo nodo o enlace a una red óptima, su topología puede requerir de fuertes reestructuraciones para volver a ser óptima en las nuevas condiciones. Ésto dificulta un proceso evolutivo entre redes óptimas. Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, algunos ecosistemas se organizan con este tipo de arquitectura enmarañada y homogénea. ¿Cómo han evolucionado? No tenemos la respuesta a esta pregunta pero sí el deseo de seguir explorando este apasionante campo de investigación y de contagiar nuestra curiosidad.

Referencias Bibliográficas

- [1] J Algunos artículos de revisión sobre Redes Complejas: S. H. STROGATZ, *Nature* **410**, 268 (2001).
- [2] Sobre el problema de la sincronización en redes:
M. BARAHONA AND L. M. PECORA, *Synchronization in small-world systems*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 054101 (2002).
T. NISHIKAWA, A. E. MOTTER, Y.-C. LAI, AND F. C. HOPPENSTEADT, *Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize?* *Phys. Rev. Lett.* **91**, 014101 (2003).
A. E. MOTTER, C. S. ZHOU, AND J. KURTHS, *Enhancing complex network synchronization*, *Europhys. Lett.* **69**, 334 (2005).
- [3] Algunas referencias matemáticas de teoría espectral de redes:
F. CHUNG, *Spectral Graph Theory*, Number 92 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Am. Math. Soc., 1997.
P. SARNAK, What is an expander? *N. Amer. Math. Soc.* **51**, 762 (2004).
- [4] Redes enmarañadas:
L. DONETTI, P. I. HURTADO AND M. A. MUÑOZ, *Entangled networks, synchronization, and optimal network topology*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 188701 (2005).
L. DONETTI, F. NERI, AND M. A. MUÑOZ, *Topological features of optimal networks: Expanders, Ramanujan graphs, Cage-graphs, entangled networks and all that*, *J. of Stat. Mech.* **08**, P08007 (2006).
- [5] Grafos jaula:
E. W. WEISSTEIN. *Cage Graph*. From MathWorld-A Wolfram Web Resource: <http://mathworld.wolfram.com/CageGraph.html>.
- [6] Redes tróficas:
E. ESTRADA, *Food webs robustness to diversity loss: the roles of connectance, expansibility and degree distribution*, *J. Theor. Biol.* **244**, 296 (2007).
- [7] Nótese que las redes tróficas son asimétricas (y pesadas) con lo que para realizar una comparación más rigurosa sería necesario estudiar redes óptimas asimétricas y pesadas.
- [8] Redes óptimas en varios contextos:
R. GUIMERÁ, A. ARENAS, A. DÍAZ-GUILERA, F. VEGA-REDONDO, AND A. CABRALES, *Optimal network topologies for local search with congestion*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 248701 (2002).
V. COLIZZA, J. R. BANAVAR, A. MARITAN, AND A. RINALDO, *Network structures from selection principles*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 198701 (2004).
R. FERRER I CANCHO AND RICARD V. SOLÉ, *Optimization in Complex Networks*, In: *Statistical Mechanics of Complex Networks*, R. Pastor-Satorras, M. Rubi and A. Diaz-Guilera, editors Lecture Notes in Physics, Springer (Berlin) pp. 114-125 (2003).

Miguel A. Muñoz (con Luca Donetti y Pablo Hurtado)
Instituto de Física teórica y Computacional Carlos I,
Universidad de Granada.